La Conjecture de Collatz

Experimental Mathematics Lab - Université du Luxembourg

La Conjecture de Collatz est un problème mathématique célèbre, formulé en 1937 par Lothar Collatz $(1910-1990)$ et reste à ce jour sans solution, même après de nombreuses tentatives de résolution.

La conjecture de Collatz s'énonce de diverses manières, dont la forme plus standard est la suivante :

Soit $n \geq 1$ un entier. Si n est pair, on divise n par 2 ; si n est impair, on multiplie n par 3 et on ajoute 1. Ré-itérer ce processus avec le nouveau nombre obtenu. La conjecture dit alors, que n'importe la valeur initiale de n, la suite décrite ci-dessus va nécessairement atteindre 1. Voici un exemple pour $n = 7$:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

On voit en particulier que pour $n = 7$, on a besoin de 17 itérations de la suite de Collatz pour aboutir au nombre 1. On dit que la durée de vol est égale à 17. Aussi, la valeur maximale atteinte dans cette suite est égale à 52.

A propos de cette conjecture, Paul Erdös disait que 'les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes'.

Buts du projet. Dans ce projet, les buts principaux sont les suivants : (N.B. Cette liste n'est pas exhaustive, le contenu précis peut être convenu ensemble avec le groupe d'étudiants)

(i) ~~Démontrer la conjecture de Collatz~~

(ii) Formuler et programmer la suite de Collatz

(iii) Expérimenter quelques exemples et représenter graphiquement la suite de Collatz

(iv) Visualiser différentes propriétés de la suite de Collatz

(v) Etudier des distributions aléatoires associées à la suite de Collatz

(vi) Etudier des variantes de la suite de Collatz

Niveau de difficulté. pas de restrictions ; tous les niveaux

Langue du projet. Français ou Anglais

Références. Voici quelques sites web pour se faire des idées : il existe évidemment une infinité d'autres sources de références !

— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse`

— `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181/document`

— `http://www.probleme-syracuse.fr/math.html#mozTocId315139`