

Rapport de Stage : Courbes sur une Surface Fermée

Léonard Cadilhac

30 août 2014

Introduction

On considère le problème suivant : étant donnée une surface de genre g et un entier n fixé, on veut déterminer le nombre maximal de courbes fermées simples que l'on peut tracer sur la surface telles que les courbes soient deux à deux non homotopes et qu'elles s'intersectent deux à deux au plus n fois. On notera ce nombre $N(g, n)$. Le but du stage était d'écrire un programme permettant de calculer $N(g, n)$ pour des petites valeurs de g et de n , en s'intéressant en particulier au cas de $N(g, 1)$. Moyennant une hypothèse supplémentaire sur les familles de courbes considérées on a trouvé un algorithme qui résout le problème, en revanche il est bien trop lent pour donner des résultats au-delà de $g = 3$. L'algorithme a été implémenté pour le calcul de $N(g, 1)$. On a aussi brièvement étudié deux articles qui donnent des résultats théoriques sur le problème, en particulier une borne en $O(g^3)$ pour $N(g, 1)$.

Puisque le déroulement du stage m'a paru atypique par comparaison à celui de L3 qui avait consisté à apprendre des maths je me permets de faire une petit descriptif :

- les deux premières semaines ont été consacrées à l'écriture d'un premier programme : apprentissage partiel de Python, élaboration d'un algorithme et programmation.

- 4 semaines pour un second programme : voyant que le premier programme était trop lent j'ai codé le second en C++, ce programme est plus ciblé et a subi de nombreux changements afin de le rendre plus rapide, il donne toutefois peu de résultats nouveaux.

- 2 semaines pour la lecture des articles, réfléchir à un algorithme exhaustif, début de la rédaction du rapport, preuve de la justesse du premier algorithme, toujours plus de programmation ... cette séparation temporelle est là pour donnée un ordre d'idée et était en pratique beaucoup moins nette.

Remerciements Je tiens à remercier l'Université du Luxembourg et en particulier Jean-Marc Schlenker pour son encadrement. Je remercie aussi l'IMT de Toulouse qui a abrité les calculs informatiques effectués durant ce stage.

Table des matières

1	Résultats préliminaires	4
1.1	Décomposition en pantalons	4
1.2	Résultats de géométrie hyperbolique	5
2	Résultats Théoriques	7
2.1	Bornes sur $N(g, 1)$	7
2.2	Courbes séparantes	8
2.3	Un problème voisin	9
2.4	Cycles d'un graphe trivalent	10
3	Partie expérimentale	11
3.1	Traduction du problème	11
3.2	Premier programme	14
3.3	Second programme	16

1 Résultats préliminaires

On présente ici des résultats généraux qui ont été utiles pendant le stage ainsi que les premiers corollaires liés au problème.

1.1 Décomposition en pantalons

Définition 1.1. *On appellera n -famille de courbes une famille de courbes fermées simples tracées sur une même surface, non homotopes deux à deux et s'intersectant deux à deux au plus n fois. On dira qu'une n -famille est maximale si il n'existe pas de n -famille strictement plus grande la contenant et qu'une n -famille est solution si il n'existe pas de n -famille strictement plus grande.*

Le problème posé lors du stage est donc de déterminer pour les surfaces fermées orientables, le cardinal des n -familles solution qui dépend de n et de g le genre de la surface. Il ne dépend bien que de ces deux paramètres puisque deux surfaces de même genre sont homéomorphes et ont donc les mêmes n -familles, à homéomorphisme près.

Définition 1.2. *Un pantalon est une surface homéomorphe à une sphère privée de trois ouverts connexes disjoints. On utilisera aussi le même terme pour une surface homéomorphe à une sphère privée de 3 points, lorsque la distinction est importante on parlera de pantalon ouvert (privé de points) ou pantalon fermé.*

Théorème 1.3. *Toute surface fermée orientable de caractéristique d'Euler strictement négative admet une décomposition en pantalons, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire comme une union finie de pantalons ouverts et de courbes fermées simples disjointes.*

De plus, il y a bijection entre les décompositions en pantalons et les 0-familles de courbes maximales par l'application qui à une décomposition en pantalon associe l'ensemble des courbes qui bordent les pantalons. En effet, soit F une 0-famille maximale, sur une surface S . Soit A une composante connexe de S privé de F . A est une surface époincée. Par maximalité de F , toute courbe fermée simple de A est soit triviale, soit homotope à un des trous de A . A est donc simplement connexe (en rajoutant les points marqués). A est une sphère époincée. A ne peut pas avoir plus de quatre points marqués sinon il existe une courbe non triviale dans A . A ne peut pas avoir deux points marqués sinon les deux courbes qui le bordent sont homotopes, ni un point car sinon la courbe est triviale. A a donc 3 points marqués, A est un

pantalon. F définit donc une décomposition en pantalon. Réciproquement, si F est une 0-famille de courbes et que S privée de F est une union disjointe de pantalons ouverts, soit C une courbe non triviale, disjointe de F . C est donc incluse dans un pantalon A . C est non triviale, donc homotope à l'un des bords du pantalon, qui appartient à F . F est donc maximale.

Corollaire 1.4. *Toutes les 0-familles maximales sont solutions et de cardinal $3g - 3$ (sur une surface de genre g). Cela signifie que $N(g, 0) = 3g - 3$.*

Pour passer du théorème au corollaire, il suffit d'utiliser la caractéristique d'Euler. La caractéristique d'Euler d'un pantalon est -1 (sphère privée de 3 faces) et celle d'une courbe fermée simple est 0 (deux sommets et deux arêtes). On utilise le lemme suivant :

Lemme 1.5. *Pour deux surfaces A et B , en notant χ la caractéristique d'Euler : $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$*

La caractéristique d'Euler d'une surface de genre g est $2 - 2g$. La surface est donc l'union de $2g - 2$ pantalons fermés (puisque leurs intersections sont de caractéristique d'Euler nulle). On compte donc $6g - 6$ courbes pour les border, chaque courbe étant comptée deux fois on obtient comme prévue $3g - 3$ courbes. Toutes les 0-familles maximales contiennent donc $3g - 3$ courbes, elles sont par suite toutes solutions et $N(g, 0) = 3g - 3$ pour $g \geq 2$.

1.2 Résultats de géométrie hyperbolique

Théorème 1.6. *Toute surface fermée de caractéristique d'Euler strictement négative admet une métrique dont la courbure est égale à -1 partout, cette métrique est dite hyperbolique.*

On va donc pouvoir utiliser les résultats suivants pour des surfaces de genre $g > 1$.

Théorème 1.7. *Soit S une surface fermée de caractéristique d'Euler strictement négative. On fixe une métrique à courbure strictement négative sur S . Alors pour toute courbe fermée simple, il existe une unique géodésique qui lui est homotope. De plus ces géodésiques sont en position minimale pour les intersections. C'est à dire que tout couple de courbes non homotopes s'intersectera au minimum autant de fois que leurs géodésiques correspondantes.*

On dit qu'une courbe est en position minimale si c'est une géodésique pour une métrique hyperbolique.

Corollaire 1.8. *Il existe une n -famille solution composée de géodésiques pour tout n .*

Remarque 1.9. *Cela signifie qu'en réalité le problème s'intéresse plus à des familles de classe d'homotopie que des familles de courbes. C'est entre autre ce principe qui permet de résoudre le problème algorithmiquement.*

Propriété 1.10. *Pour une métrique hyperbolique, l'aire d'une surface de caractéristique d'Euler $-k$ est $2\pi k$. L'aire d'un triangle (bordé par des géodésiques) est π .*

On en déduit que le cardinal maximal d'un ensemble d'arcs simples non triviaux, disjoints et deux à deux non homotopes sur une surface époincée S de caractéristique d'Euler χ est $3|\chi|$. On fixe une métrique hyperbolique. On peut se limiter au cas où tous les arcs sont des géodésiques. On remarque que tout ensemble de dcourbe vérifiant les conditions précédentes peut être étendu en une triangulation de la surface. Chaque triangle est d'aire π , la surface est d'aire $2\pi|\chi|$. Il y a donc $2|\chi|$ bordés par $6|\chi|$ arcs que l'on compte chacun deux fois, d'où $3|\chi|$ arcs.

2 Résultats Théoriques

Les deux premières sous-sections sont issus d'articles de recherche récents tandis que les deux suivantes sont de petits résultats démontrés pendant le stage.

2.1 Bornes sur $N(g, 1)$

La première borne supérieure découverte était exponentielle, sa démonstration utilise l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Propriété 2.1. *Soit S une surface fermée orientable de genre $g \geq 2$. Alors toute 1-famille de courbes sur S a au maximum $g - 1$ courbes dans chaque classe d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. [2]*

Lemme 2.2. *Soit $g > 0$ et S une surface de genre g avec deux composantes de bord. Soit F une 0-famille de courbes séparantes de S telles que toute courbe de F sépare les composantes de bord. On a $|F| < g$. [2]*

Démonstration. On raisonne par récurrence forte sur g . Supposons $g = 1$. Dans ce cas, les seules courbes séparantes qui ne sont pas homotopes aux bords de S coupent S en un tore avec une seule composante de bord et une sphère à trois trous. Une telle courbe ne sépare pas les composantes de bord de S .

On suppose maintenant $g > 1$. En coupant S le long d'une courbe c de F , on obtient deux surfaces S_1 et S_2 de genres respectifs g_1 et g_2 dont la somme est égal à g et chacune a 2 composantes de bord. On remarque que F privé de c se scinde en une 0-famille de S_1 et une 0-famille de S_2 avec les mêmes propriétés que F . D'où par hypothèse de récurrence :

$$|F| \leq 1 + g_1 - 1 + g_2 - 1 = g - 1.$$

Démonstration de la propriété. Il suffit de montrer qu'il ne peut pas y avoir plus de $g-1$ courbes disjointes dans la même classe d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit S une surface de genre $g > 1$ et F une 0-famille de courbes toutes contenues dans la même classe d'homologie. On veut se ramener au lemme. En coupant S le long d'une courbe γ on obtient une surface S' de genre $g' = g - 1$ avec deux composantes de bord. En remplissant les deux bords on obtient une nouvelle surface fermée S'' . Les courbes de F sont nulles dans $H_1(S'', \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cela signifie que leur homologie dans $H_1(S'', \mathbb{Z})$ est nulle ou non primitive (ce qui est impossible car les courbes sont simples). Donc toute courbe de F sépare S'' . De plus, les courbes de F séparent les composantes de bord de S' . Sinon elles seraient séparantes dans S ce qui est impossible car elles ne sont pas homologues à 0. On est donc dans la situation du lemme.

La borne découle ensuite du fait qu'il existe $2^{2g} - 1$ classes d'homologies non triviales à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et d'après la proposition 2.1, elles contiennent au plus $g - 1$ courbes dans une 0-famille, on obtient donc un maximum de $(g - 1)(2^{2g} - 1)$ courbes. Ce résultat est maintenant obsolète.

On a vu que l'on pouvait obtenir des résultats pour le calcul de $N(g,0)$ avec des considérations sur les aires en géométrie hyperbolique. La borne suivante est obtenue grâce à la même idée mais nécessite un travail de construction pour l'appliquer. On admettra le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Le cardinal maximal d'un ensemble d'un ensemble d'arcs simples deux à deux non homotopes et s'intersectant au plus une fois sur une surface épointée de caractéristique d'Euler χ est : $f(\chi) = 2|\chi|(|\chi| + 1)$ [4]*

On peut en déduire la borne cubique suivante pour une surface S de genre g et de caractéristique d'Euler χ .

Théorème 2.4. *$N(g,1) \leq g(2f(|\chi|) + 1) + |\chi| - 1$ avec f la fonction du théorème précédent. [4]*

Démonstration. Soit F une 1-famille de courbes. On remarque que si toutes les courbes de F sont séparantes elles sont disjointes. Le théorème s'en déduit puisque un ensemble de telles courbes ne peut pas contenir plus de $|\chi| - 1$ éléments. Nous supposons donc par la suite qu'il y a une courbe non séparante dans F .

On raisonne par récurrence sur g à χ fixé. Si $g = 0$, toutes les courbes sont séparantes, on a déjà traité ce cas. Si $g > 0$, on choisit une courbe non séparante γ dans F . Notons F_{dis} la famille des courbes de F disjointes de γ et F_{int} celles qui l'intersectent. Soit S' la surface épointée obtenue en coupant S le long de γ . S' est de même caractéristique d'Euler que S mais de genre $g - 1$. Par hypothèse de récurrence on a donc $|F_{dis}| \leq (g - 1)(2f(|\chi|) + 1) + |\chi| - 1$.

Chaque courbe de F_{int} est coupée en un arc de S' . Deux courbes ayant la même projection sur S' diffèrent d'une puissance du twist de Dehn D le long de γ . Puisque des courbes différant de D^l s'intersectent en l points, il y a au plus deux courbes dans F_{int} pour chaque arc de S' . D'où par le théorème précédent $|F_{int}| \leq 2f(|\chi|)$. Ce qui donne le résultat attendu :

$$\begin{aligned} |F| &= 1 + |F_{dis}| + |F_{int}| \leq 1 + (g - 1)(2f(|\chi|) + 1) + |\chi| - 1 + 2f(|\chi|) \\ &\leq g \cdot (2f(|\chi|) + 1) + |\chi| - 1. \end{aligned}$$

2.2 Courbes séparantes

Théorème 2.5. *Une 1-famille solution ne contient pas de courbes séparantes.[2]*

La démonstration s'agence comme suit :

Lemme 2.6. *Soit F une 1-famille solution telle que toutes les courbes de F sont en position minimale. Alors les composantes connexes du complémentaire de F sont des polygones et des anneaux. De plus, chaque anneau a une frontière consistant en une courbe de F .*

On obtient rapidement que les composantes connexes ne peuvent être que des pantalons, des anneaux ou des polygones. Il est plus difficile d'éliminer les pantalons, pour cela, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'une des composantes est un pantalon, alors les 3 bords du pantalon sont des courbes de F , sinon on pourrait les rajouter ce qui contredirait la maximalité de F . On construit ensuite une 1-famille plus grande que F en éliminant un des bords du pantalon et en rajoutant 2 courbes.

Le raisonnement pour passer du lemme au théorème est similaire, on suppose par l'absurde que F contienne au moins une courbe séparante. On remarque d'abord qu'une courbe séparante bordera nécessairement 2 anneaux (puisque'elle n'est intersectée par aucune autre courbe de F). On construit ensuite une 1-famille plus grande que F en enlevant une courbe séparante et en rajoutant 2 courbes.

2.3 Un problème voisin

Une problème similaire au calcul de $N(g, n)$ auquel on peut s'intéresser, est celui du plus grand nombre de courbes simples non homotopes s'intersectant en tout au plus k fois (et non deux à deux). Notons ce nombre $M(g, n)$. Cette question est naturelle puisque son calcul par informatique est très similaire à celui de $N(g, n)$.

Propriété 2.7. *Pour $g > n$, $M(g, n) \leq 3g - 3 + n$*

Démonstration. Soit F une famille de courbes qui est solution pour le calcul de $M(g, n)$. Notons X une sous-0-famille maximale de F . X a au plus $3g - 3$ éléments. Par maximalité de X , toute courbe de F privé de X intersecte au moins une courbe de X , il y a donc au plus n courbes dans F privé de X . F contient donc au plus $3g - 3 + n$ courbe. Cette borne n'est pas optimale mais on a clairement $N(g, 0) \leq M(g, n)$ donc $M(g, n) \approx 3g$ lorsque g tend vers l'infini.

On peut aussi étudier le comportement de $M(g, n)$ à g fixé, lorsque n grandit. On peut le placer entre $O(\sqrt[3]{n})$ et $O(\sqrt{n})$. On reformule le problème : étant donnée une surface de genre g et une famille de k courbes simples non homotopes, quel est le nombre minimal d'intersections possibles entre ces courbes. Ce nombre évolue au moins en $O(k^2)$. En effet, soit F une famille de k courbes simples non homotopes. On pose $n = 3g - 3$. Soit C

une sous-0-famille de F maximale. Toute courbe de F $C = F'$ intersecte au moins une fois une courbe de C , ce qui donne $k - n$ intersections. On réitère ensuite le raisonnement sur F' . On note $k' = \lfloor k/n \rfloor$. On obtient $\sum_{i=1}^{k'} k - in \geq n(\sum_{i=1}^{k'} k' - i) = nk'(k' - 1)/2$. C'est bien un $O(k^2)$. Pour la borne supérieure, il suffit d'exhiber des ensembles de courbes convenables. On considère les courbes C et C' du dessin ci-dessous. Soit D le twist de Dehn autour de C' . On note γ_i la courbe obtenue en appliquant D^i à C . On prend comme famille de k courbes $(\gamma_i)_{i < k}$. On remarque que le nombre d'intersections entre γ_i et γ_j est $|i - j|$, on obtient un nombre d'intersections totale en $O(k^3)$.

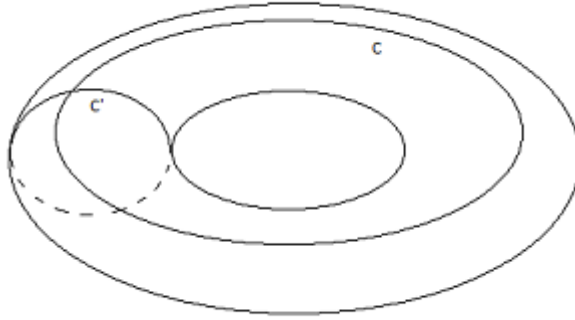


FIGURE 1 –

2.4 Cycles d'un graphe trivalent

On s'intéressera dans la prochaine section à des graphes trivalents et aux cycles qu'ils contiennent, ils serviront à coder les surfaces et les courbes. Cela nous a amené à considérer le résultat suivant.

Propriété 2.8. *Un graphe trivalent ayant $2g - 2$ sommets contient au maximum $2^g - 1$ cycles, cette borne est optimale.*

On démontre seulement l'optimalité de la borne.

Le graphe ci-dessus contient exactement $2^g - 1$ cycles. Il y a $g-1$ diagonales, on remarque que pour tout ensemble non vide de diagonales que l'on choisit, il y a deux manières de les relier afin de former un cycles, il faut ensuite rajouter le cycle ne contenant aucune diagonale. Cela donne $2(2^{g-1} - 1) + 1 = 2^g - 1$ cycles.

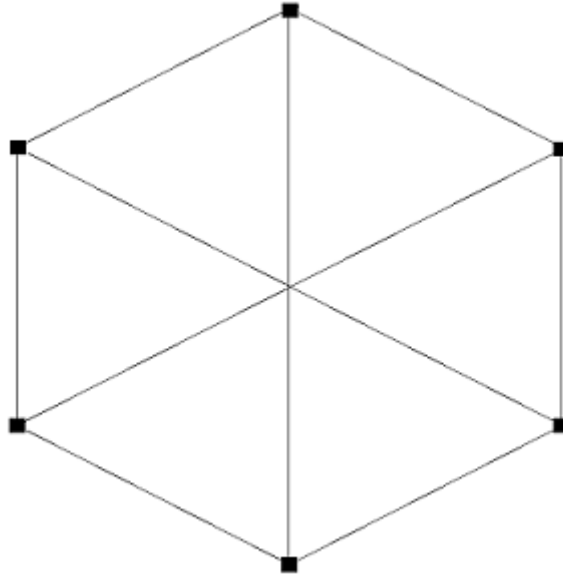


FIGURE 2 – graphe pour $g = 4$

3 Partie expérimentale

3.1 Traduction du problème

Afin d'écrire un programme qui peut calculer $N(g, k)$, il faut tout d'abord trouver une manière de coder une surface, ainsi que les courbes fermées que l'on peut tracer dessus. Brièvement, pour tout entier n , on peut trouver un graphe G tel qu'un voisinage tubulaire de G soit une surface de genre n . Une courbe est alors caractérisée par sa projection sur le graphe qui peut être définie comme la suite finie des arêtes qu'elle traverse, et pour chaque arête, par un entier relatif qui compte le nombre de tours que la courbe effectue autour du cylindre qu'est le voisinage de cette arête.

Remarque 3.1. *Pour une surface fermée donnée S de genre g , toute décomposition en pantalons donne un graphe trivalent représentant S . Il suffit pour cela de prendre pour sommets les différents pantalons et de les relier par une arête s'ils sont adjacents sur la surface. Réciproquement, un graphe trivalent définit immédiatement une surface : l'union de n pantalons où n est le nombre de sommets du graphe en identifiant adéquatement les bords de deux pantalons correspondants à des sommets adjacents. Les raisonnements effectués dans la section 1 permettent alors de remarquer que le genre g de la surface codée par un graphe trivalent ne dépend que de son nombre de*

sommet qui est nécessairement égal à $2g - 2$. Dans la suite, tous les graphes seront trivalents.

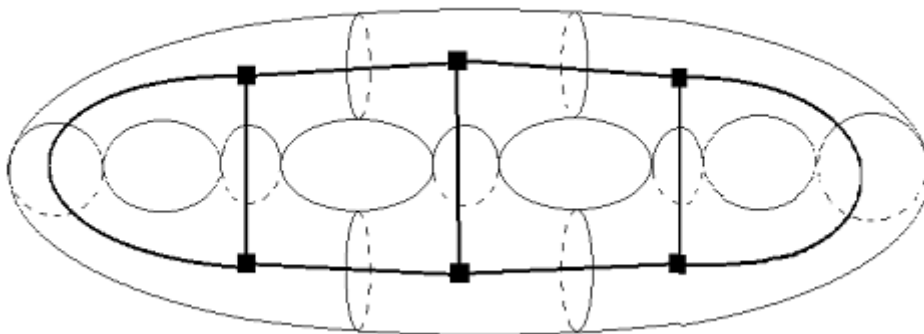


FIGURE 3 – $g = 4$

Il existe une autre manière de définir la surface S codée par un graphe G , que l'on utilisera lors des démonstrations. On relève chaque arête en un cylindre. Les bords des cylindres sont des cercles. On identifie la moitié des bords de chaque cylindres adjacents comme l'illustre la figure ci-après. Notons A l'ensemble des arêtes de G . On pose donc $S = Ax[0, 1]x[0, 1]/R$ où R est la bonne relation d'équivalence. C'est-à-dire $(a, x, 0)$ est identifié à $(a, x, 1)$ pour tout a de A et tout x de $[0, 1]$. On identifie aussi les demi-cercles, en imposant que chaque demi-cercle joigne un point de la forme $(a, i, 0)$ à un point de la forme $(a, i, 1/2)$, i pouvant ici valoir 0 ou 1. Une fois 2 demi-cercles fixés, il y a 2 manières de les recoller, on choisira toujours celle où les points d'ordonnée 0 sont identifier entre eux. Il n'y a toujours pas unicité de R , on fixe un choix quelconque. L'intérêt est que l'on peut facilement définir une métrique sur la surface obtenue en imposant que les cartes évidentes soient des isométries, le recollement se fait sans problème sauf aux points commun à 3 cylindres qui présentent une singularité à courbure négative. La courbure de la surface ainsi obtenue est donc négative, il existe donc des k -familles de courbes maximales ne contenant que des géodésiques pour cette métrique, ce qui est intéressant puisque il est facile de décrire ces géodésiques : elles vont en ligne droite sauf lorsqu'elles croisent les points de singularité où elles peuvent changer de direction.

Définissons maintenant le codage des courbes. Rappelons qu'une courbe est codée par une suite finie d'arêtes et une suite de même longueur d'entiers relatifs correspondant au comportement de la courbe sur chaque arête. Plus précisément, soit s un code, notons $R(s)$ l'ensemble des courbes représentées

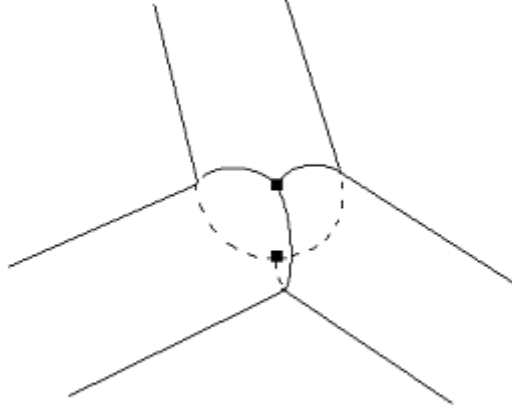


FIGURE 4 –

par c , on va définir une courbe $C(s)$ construite à partir de s . On posera $R(s)$ égal à l'ensemble des courbes homotopes à $C(s)$.

Définition de $C(s)$ - Soit s un code, n sa longueur. $(a_i)_{i < n}$ la suite de ses arêtes et $(k_i)_{i < n}$ la suite des indices les accompagnant. On définit la courbe C_i , $i < n$ comme la fonction $[0,1] \mapsto S$ qui a t associe $(a_i, t, k_i t[1])$, et \overline{C}_i qui a t associe $C_i(1-t)$. Si les arêtes se suivent convenablement, on peut recoller les courbes précédentes en choisissant pour tout i C_i ou \overline{C}_i , $C(s)$ est par définition la courbe fermée obtenue. La construction précédente n'est pas la bonne si deux arêtes identiques se suivent. Il faut corriger comme suit. Chaque singularité appartient à trois demi-cercles, notons $C_{a,j}$ un paramétrage du demi-cercle passant par $(a, j, 0)$ qui n'est pas inclu dans le cylindre a et tel que $C_{a,j}(0) = (a, j, 0)$ et $C_{a,j}(1) = (a, j, 1/2)$ (j valant 1 ou 0). Dans le cas où $a_{i-1[n]} = a_i$, C_i est le recollement de $C_{a_i,0}$ avec la courbe $t \mapsto (a_i, t, 1/2 + t(k_i - 1/2))$ et \overline{C}_i est le recollement de $C_{a_i,1}$ avec $t \mapsto (a_i, 1-t, 1/2 - t(k_i - 1/2))$.

Théorème 3.2. *Pour toute courbe fermée simple C dont la projection n'est pas réduite à un point, il existe un unique code s qui représente C .*

Idée de la démonstration - Il suffit de démontrer la propriété pour des géodésiques. On considère une géodésique. On définit une courbe homotope qui passe par la singularité $(a, j, 0)$ à chaque changement d'arête. On démontre ensuite que chaque segment est homotope à une courbe du type des C_i définis plus haut et donc que la courbe en entier est homotope à une courbe de type $C(s)$.

Propriété 3.3. *Si deux codes contiennent la même arête, notons k_1 et k_2 les indices respectifs des codes en cette arête, alors le nombre minimale d'intersections entre les courbes représentées par ces codes est supérieur à $|k_1 - k_2| - 1$.*

Démonstration. Notons l'arête en question a . Considérons des géodésiques réalisant le nombre minimale d'intersections, notons C et C' les restrictions de ces géodésiques à a lors des passages d'indices k_1 et k_2 . $C : t \mapsto (a, t, x + ty)$ et $C' : t \mapsto (a, t, v + tw)$. D'après la construction précédente $|y - k_1| \leq 1/2$ et $|w - k_2| \leq 1/2$. C et C' s'intersectent lorsque $x - v + t(y - w) = 0$ [1]. Le nombre d'intersections est donc supérieur à la partie entière inférieure de $|y - w|$ qui est supérieure à $|k_1 - k_2| - 1$. On en déduit donc que pour le calcul de $N(g, 1)$, il suffit de considérer des indices compris entre -1 et 1. En effet pour chaque arête, on peut supposer que l'indice minimal est -1, il est alors inutile de considérer des indices supérieurs à 1 d'après la propriété précédente. Il reste toujours une infinité de courbes à considérer. On fait le choix de ne considérer que les familles de courbes contenant une 0-sous famille maximale, autrement dit une famille découpant la surface en pantalons. Cela donne alors un graphe pour la surface comme on l'a vu précédemment et le fait de supposer que l'on a les courbes délimitants les pantalons dans les 1-familles considérés est équivalent à dire que chaque courbe ne peut passer qu'une fois par chaque arête. Les projections des courbes sur le graphe sont donc des cycles (car le graphe est trivalent).

3.2 Premier programme

On fixe un graphe G pour une surface S . De ce fait, on a fixé une décomposition en pantalon. On veut trouver la 1-famille de courbes maximale contenant cette décomposition. On peut énumérer toutes les courbes : il suffit pour cela d'énumérer les cycles sur le graphe puis de placer toutes les combinaisons possibles d'indices sur les arêtes (rappel : on ne place que des -1, des 0 ou des 1). Il est inutile de considérer les graphes contenant une arête séparante, il est alors raisonnable de penser que le nombre de courbes est supérieur à 3^g . On calcule ensuite le nombre d'intersections entre chaque courbe. Le problème qui à partir de cette information consiste à déterminer une famille maximale de courbe est NP-complet, il est en effet similaire au problème de la plus grande clique d'un graphe (le plus grand sous-graphe complet). L'algorithme simple qui résoud ce problème est en complexité 2 puissance le nombre de courbe, on obtient donc une complexité minimale de 2^{3^g} . Ceci est une minoration, concrètement cet algorithme ne fonctionne que pour un graphe de genre 2 et n'a aucune chance de fonctionner pour un

graphe de genre 3. En effet, le nombre de courbes pour un des graphes de genre 3 est 342, ce qui donne un ordre de grandeur de 2^{342} opérations à effectuer. Ce programme permet de retrouver le résultat $N(2, 1) = 12$, dans le cas où l'on a supposé que la 1-famille maximale contient une décomposition en pantalon. Il a aussi permis d'élaborer l'algorithme qui calcule le nombre d'intersections minimales entre les courbes codées.

Définition 3.4. *On dira qu'une suite finie d'arête L est un segment commun à 2 cycles ou 2 courbes si :*

- chaque arête de L appartient aux deux cycles/courbes
- chaque arête de L est adjacente à la suivante
- L est maximale dans le sens où toute suite vérifiant les deux premières conditions et ayant une arête commune avec L est plus courte que L .

On identifie les segments contenant exactement les mêmes arêtes. De plus, par convention, le seul segment commun à 2 cycles identiques ou à 2 courbes ayant la même projection est la suite ordonnée de toutes les arêtes du cycle.

Description de l'algorithme calculant le nombre d'intersections de 2 courbes :

- on détermine les segments commun aux 2 courbes
- on calcule le nombre d'intersections sur chaque segment
- on additionne

Calcul sur un segment - on imagine pour cela que les courbes sont la plupart du temps très proche du relèvement de leur projection qui n'aurait que des 0 en tant qu'indices, elles ne quittent cette courbe que pour tourner autour des cylindres. On a aussi une notion de sens sur les courbes en prenant un représentant du segment. Cela permet de définir une notion de gauche et de droite, il y a toujours une courbe à droite de l'autre et donc une à gauche. L'algorithme procède ainsi :

- on détermine quel courbe est à droite/gauche au début du segment
- sur chaque arête on détermine en fonction des indices quel courbe passe à droite/gauche et on incrémente le nombre d'intersections s'il le faut
- on incrémente encore le nombre d'intersections de 1 si les courbes doivent se croiser à la sortie du segment, autrement dit si elles ne sont pas bien positionnées en terme de gauche/droite.

On ne prouvera pas que ce procédé fonctionne.

Remarque 3.5. *L'algorithme expliqué ci-dessus fonctionne, à quelques aménagements près, pour le calcul de $N(g, n)$ si l'on suppose toujours qu'il existe une n -famille maximale contenant une décomposition en pantalon. En effet, une fois la décomposition en pantalon fixée et donc le graphe, il y a un nombre fini de courbes passant au plus n fois sur chaque arête. On peut donc appliquer l'algorithme : énumérer les courbes, calculer leurs nombres d'intersections et déterminer la famille maximale.*

3.3 Second programme

Le second programme répond, une fois le graphe d'une surface fixé, à la question suivante : étant donnée une famille de cycles (avec multiplicités), peut-on la relever en une 1-famille de courbes ? Pour cela on détermine les relèvements arête par arête sur chaque cycle en calculant au fur et à mesure le nombre d'intersections entre chaque courbes. On considère récursivement toutes les possibilités de relèvement. Le calcul progressif du nombre d'intersections permet toutefois de repérer le plus tôt possible quelles branches de l'arbre des possibilités ne donneront pas de solutions. Une majoration brutale de la complexité de l'algorithme qui serait de l'ordre de 3^{ng} où n est le nombre de courbes, est donc très loin de la vérité puisque l'algorithme a fonctionné pour 14 courbes et un graphe de genre 3. Il est toutefois complètement obsolète pour un graphe de genre 4 dans son état actuel. Il permet de retrouver le résultat en genre 2 et a permis de montrer $N(3, 1) \leq 25$, il est probable que le résultat ne soit pas loin de cette borne. Le programme casse les symétries de l'arbre des possibilités dues à la répétition d'un même cycle en entrée, il impose aussi que le plus petit indice placé sur chaque arête soit -1, ces deux ajouts permettent d'accélérer les calculs.

Le programme est récursif il contient 3 fonctions principales : récurrence sur les arêtes, récurrence sur les segments et récurrence sur les courbes. Le terme courbe désignera ici les courbes que l'on cherche à obtenir et dont on connaît la projection sur le graphe, de même pour le terme segment. Les arêtes sont ordonnées. Pour comprendre l'algorithme, il ne faut pas ici prendre le mot courbe au sens propre, mais plutôt penser à leur codages, dont la partie arête et déjà déterminé, il reste à placer les indices.

Récurrence sur les arêtes :

- si la fonction est appelée avec une arête, elle appelle la récurrence sur les segments l'arête étant fixée

- si la fonction est appelée alors que toutes les arêtes sont déjà traitées, elle vérifie que toutes les courbes sont bien distinctes, si oui une solution a été trouvées

Récurrence sur les segments :

- s'il n'y a plus de segments à traiter, on appelle la récurrence sur les courbes

- si il reste un segment qui se termine à l'arête fixée et qui n'a pas encore été traité, on s'en occupe. Le traitement d'un segment (commun à deux courbes) consiste à placer des indices (-1,0 ou 1) sur l'arête fixée et sur les deux courbes considérées, en déterminer les conséquences sur le nombre d'intersections, si le nombre d'intersections ne dépasse pas 1, on rappelle la récurrence sur les segments. On efface les indices ajoutés.

Récurrance sur les courbes :

- s'il n'y a plus de courbes à traiter, on appelle la récurrance sur les arêtes avec l'arête suivante

- sinon on traite la courbe de manière similaire au traitement d'un segment : on place les indices (-1,0 ou 1), on regarde les nombre d'intersections et s'il le faut, on appelle la récurrance sur les courbes. On efface les indices ajoutés. Les courbes que l'on traite sont celles qui passent par l'arête fixée.

La liste des segments et des courbes à traiter est précalculée pour chaque arête avant le début de la récurrance sur les arêtes.

Résumé des résultats obtenus. On a fait le calcul jusqu'au bout jusqu'à une entrée de 14 courbes. Pour cette entrée, avec des types de courbes répartis le plus équitablement possible entre les cycles, on obtient environ 19 000 000 de solutions possibles (sachant que des symétries ont déjà été exploitées). Pour plus de courbes et des types répartis (par exemple 2 de chaque pour 14, 2 de chaque et sauf pour un cycle dont n choisit 3 exemplaires pour 15 ...), on a pas fini le calcul mais l'algorithme a trouvé une solution pour 19 courbes. Dans le même temps, en prenant une entrée déséquilibrée (2 cycles en 5 exemplaires, 3 en 2 exmplaires et 1 en seulement 1 exemplaire), l'algorithme s'est terminé et a trouvé seulement 58 643 solutions.

Remarque 3.6. *Ce programme est assez intéressant pour g petit puisque le nombre de cycles à considérer est faible par rapport au nombre de courbes d'une 1-famille solution (pour $g = 2$, 3 cycles et 9 courbes, pour $g = 3$, 7 cycles et plus de 19 courbes). Il y a donc un nombre limité de choix raisonnables pour la famille de cycle imposée par l'utilisateur, comparé au nombre de possibilités pour les indices, traités par le programme. En revanche, on a montré que le nombre de cycles pouvait augmenter exponentiellement en fonction de g (au maximum $2^g - 1$ qui est atteint) alors que le nombre de courbe évolue en $O(g^3)$. Pour g grand, on peut donc supposer que le choix des cycles est primordial.*

Références

- [1] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer On Mapping Class Groups*. Princeton Mathematical, 2011.
- [2] Justin Malestein, Igor Rivin, and Louis Theran. Topological designs. URL <http://arxiv.org/abs/1008.3710>, 2013.
- [3] William S. Massey. *Algebraic Topology, an Introduction*. New-York : Springer-Verlag, 1987.

- [4] Piotr Przytycki. Arcs intersecting at most once. *URL*
<http://arxiv.org/abs/1402.1570>, 2014.