Équation diophantienne ax + by = c

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$, et considérons l'équation $ax + by = c$.

Cas special : Si $a = b = 0$ on obtient $0 = c$. Elle n'a pas de solution si $c \neq 0$. Par contre, si $c = 0$, toute paire (x, y) est solution ($0x + 0y = 0$ est toujours vraie).

Si $a \neq 0$ **ou** $b \neq 0$ **:** Les solutions réelles de $ax + by = c$ forment une droite dans le plan euclidien. Est-ce que on a des solutions (x, y) avec x, y des entiers ?

• L'équation est soluble si et seulement si le $PGCD(a, b)$ divise c. [Exercice.]
• On a soit aucune solution, soit une infinité de solutions. [On peut écrire l'ensemble des solutions.]

Une solution : Avec l'algorithme d'Euclide on peut trouver x_0 et y_0 tels que

$$ax_0 + by_0 = PGCD(a, b)\,.$$

Ensuite, si $c = n \cdot PGCD(a, b)$, on peut écrire

$$a(nx_0) + b(ny_0) = c$$

et donc on peut trouver une solution pour $ax + by = c$. [En pratique il est souvent facile de deviner une solution. . .]

Ensemble des solutions : Soit (x_s, y_s) une solution. L'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(x_s + \frac{b}{PGCD(a,b)} \cdot t, y_s - \frac{a}{PGCD(a,b)} \cdot t\right) \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}\right\}.$$

À noter : si l'on fait une autre choix pour (x_s, y_s), cet ensemble ne change pas.

Exemples :

- $6x + 9y = 14$ pas de solutions
- $6x + 9y = 21$ $\{(-1 + 3t, 3 - 2t) \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}\}$
- $6x - 9y = -21$ $\{(-1-3t, -3-2t) \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}\} = \{(-1+3z, -3+2z) \quad \text{avec } z \in \mathbb{Z}\}$

Problème : Faire jouer 100 enfants avec des jeux pour 6 ou pour 8 enfants.
Stratégie : Résoudre $6x + 8y = 100$ en cherchant des solutions entières puis choisir (x, y) avec x et y positifs ou nuls. L'ensemble des solutions est

$$\{(6 + 4t, 8 - 3t) \quad \text{avec } t \in \mathbb{Z}\}\,.$$

La condition $x = 6 + 4t \geqslant 0$ donne $t \geqslant -1$ et la condition $y = 8 - 3t \geqslant 0$ donne $t \leqslant 2$. Donc avec $t = -1, 0, 1, 2$ on trouve les paires (x, y) cherchées :

$$(2, 11), (6, 8), (10, 5), (14, 2)$$