Systèmes de numération

1 Numération en base b

Normalement, on voit un nombre comme une somme de puissances de 10, en prenant chaque puissance de 0 à 9 fois (car dix fois une puissance est la puissance successive). Un chiffre indique combien de fois on a pris une puissance, et la position du chiffre indique de quelle puissance il s'agit. En générale on peut travailler avec les puissances d'un nombre entier $b \geqslant 2$. Les chiffres sont alors les nombres de 0 à $b-1$ (on a b chiffres).

Exemples : Le nombre 12 s'écrit comme $(1100)_2$ dans la base 2, $(110)_3$ dans la base 3, $(30)_4$ dans la base 4, $(22)_5$ dans la base 5, $(20)_6$ dans la base 6, $(15)_7$ dans la base $7\ldots$, $(10)_{12}$ dans la base 12, et $((12))_b$ dans une base $b \geqslant 12$.

Exemples : Le nombre $(10)_b$ est b, le nombre $(101)_b$ est b^2+1. Si $b \geqslant 3$, le nombre $(1020)_b$ est le nombre $b^3+2\cdot b$. Si $b \geqslant 15$, le nombre $(13(14)1)_b$ est le nombre $b^3+3\cdot b^2+14\cdot b+1$.

Théorème : Soit $b \geqslant 2$ un entier. Chaque nombre entier strictement positif a une écriture unique de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i = (c_n \ldots c_0)_b$$

où n et les c_i sont des entiers, avec $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant c_i \leqslant b-1$ et $c_n \neq 0$.

On écrit $0 = 0 \cdot b^0 = (0)_b$. Pour les nombres négatif, il suffit de rajouter le signe moins.

2 Le nombre de chiffres

Un nombre avec $n+1$ chiffres

$$(c_n \ldots c_0)_b = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i$$

est au moins $(10\ldots 0)_b = b^n$ (par exemple, 456 est au moins 10^2) et au plus

$$((b-1)\cdots(b-1))_b = \sum_{i=0}^{n}(b-1)b^i = \sum_{i=0}^{n} b^{i+1} - b^i = b^{n+1} - 1$$

(par exemple, 456 est au plus $999 = 10^3 - 1$).

• Le nombre de chiffres est l'exposant de la plus petite puissance de b qui est strictement plus grand du nombre.

3 Changement de base

On peut toujours utiliser la base 10 comme étape intermédiaire.

Changement de base $b \rightsquigarrow 10$ **:** C'est facile. On écrit le nombre comme somme de puissances de b et on calcule la somme. Par exemple $(102)_3$ est $3^2 + 2 \cdot 3^0 = 11$.

Changement de base $10 \rightsquigarrow b$ **:** On détermine les chiffres dans la base b successivement, en commençant par le dernier, avec une chaîne de divisions par b.
• Le dernier chiffre d'un nombre en base b est son reste dans la division par b.
• Si on efface le dernier chiffre d'un nombre en base b, on trouve le quotient du nombre dans la division par b. [Si on remplace le dernier chiffre d'un nombre a par 0 on trouve $a - r = qb$, où q, r sont le quotient et le reste pour $a : b$, et effacer le zéro final c'est diviser par b.]

Exemple : On écrit 100 en base 6. On s'attend à 3 chiffres car $6^2 < 100 < 6^3$, et donc on écrit $100 = (c_2c_1c_0)_6$. La division $100 : 6$ donne quotient 16 et reste 4, donc $c_0 = 4$ et $(c_2c_1)_6 = 16$. La division $16 : 6$ donne quotient 2 et reste 4, donc $c_1 = 4$ et $(c_2)_6 = 2$. La division $2 : 6$ donne quotient 0 et reste 2, donc $c_2 = 2$. Vérification : $(244)_6 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 4 = 72 + 24 + 4 = 100$.

Changement de base $10 \rightsquigarrow b$ **(alternative facile) :** On trouve les puissances de b dont la somme est le nombre donné. On soustrait du nombre la plus grande puissance de b qui est plus petite ou égale à celle-ci. Par itération, le nombre devient de plus en plus petit et à la fin on obtient 0. La somme des puissances de b utilisées est le nombre initial.

Exemple : Écrivons 100 en base 6. Comme $6^2 < 100 < 6^3$ on écrit

$$100 = 6^2 + 64 = 6^2 + 6^2 + 28 = 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 4\,.$$

4 Critères de divisibilité dans une base b

• **Puissances de** b **:** Un nombre est divisible par b^n si et seulement si ses n derniers chiffres sont 0. Par exemple 27000 est divisible par 10, 10^2, et 10^3, mais non par 10^4 ou 10^5 etc. Le nombre $(1010)_4$ est divisible par 4 mais il n'est pas divisible par 16.

• **Puissances d'un diviseur de** b **:** Avec les derniers chiffres on teste aussi la divisibilité par les diviseurs de b. Mais attention aux puissances : $a = (c00)_{12}$ est divisible par 12^2 et donc aussi par $4^2 = 2^4$ et 3^2. Comme $c \neq 0$, le nombre a n'est pas divisible par 12^3. Mais il pourrait être divisible par 2^5 ou 2^6 (si c est pair ou divisible par 4) ou il pourrait être divisible par 3^3 (si c est divisible par 3).

• $b-1$ **(et ses diviseurs) :** La différence entre un nombre et la somme de ses chiffres est divisible par $b-1$ [grâce à la première identité remarquable rappellée en bas]. Donc on a pour chaque diviseur d de $b-1$:

$$d \mid (c_n \dots c_0)_b \qquad \Leftrightarrow \quad d \mid \sum_{i=0}^{n} c_i$$

En base 10, pour voir si un nombre est divisible par 3, on regarde si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

• $b+1$ **(et ses diviseurs) :** La différence entre un nombre et la somme alternée de ses chiffres est divisible par $b+1$ [grâce à la deuxième et troisième identité remarquable rappellée en bas]. Donc on a pour chaque diviseur d de $b+1$:

$$d \mid (c_n \dots c_0)_b \qquad \Leftrightarrow \quad d \mid \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_i$$

En base 10, pour voir si un nombre est divisible par 11, on regarde si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.

5 Le choix de la base 10

On peut faire l'arithmétique en base b (10 n'est pas du tout un nombre spécial). Il faut bien distinguer les propriétés arithmétiques qui sont vraies dans chaque base, et celles qui sont liées au choix de la base 10.

Exemples : On a les opérations aussi en base b :

$$(101)_2 + (11)_2 = (1000)_2 \qquad (13)_4 + (3)_4 = (22)_4 \,.$$

Rappel :

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1) \qquad \text{pour chaque } m \geqslant 1$$

$$x^m - 1 = (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \ldots + x - 1) \qquad \text{pour chaque } m \geqslant 1 \text{ pair}$$

$$x^m + 1 = (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \ldots - x + 1) \qquad \text{pour chaque } m \geqslant 1 \text{ impair}$$

En remplaçant $x = \frac{a}{b}$ on voit que $(a-b) \mid (a^m - b^m)$, et que $(a+b)$ divise $a^m - b^m$ si m est pair et $a^m + b^m$ si m est impair.
