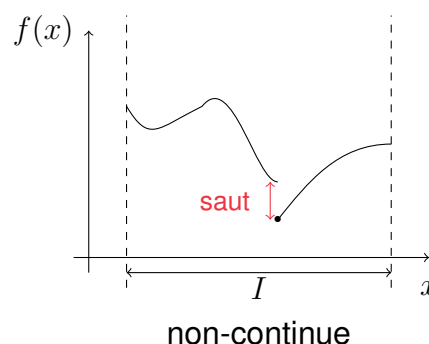
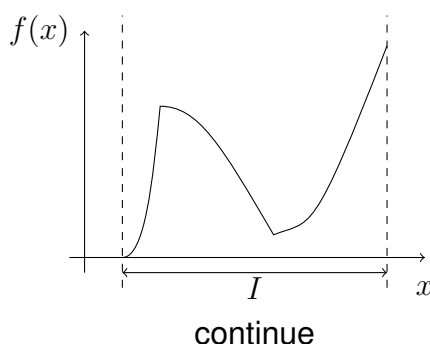


# Continuité

1. Soit  $a = -\infty$  ou un nombre réel et  $b$  un nombre réel ou  $b = +\infty$  tels que  $a < b$ . L'ensemble des nombres réels  $x$  vérifiant  $a \leq x \leq b$  (resp.  $a \leq x < b$ ,  $a < x \leq b$  ou  $a < x < b$ ) est noté  $[a, b]$  (resp.  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  or  $]a, b[$ ). Un *intervalle* de  $\mathbb{R}$  est, par définition, n'importe lequel de ces ensembles.
2. Soit  $I$  un intervalle. une fonction  $f$  définie sur  $I$  envoyant  $x$  dans  $I$  sur  $f(x)$  est *continue* si l'on peut dessiner son graphe sans lever le stylo. Autrement dit, s'il n'y a pas de saut dans son graphe. Par exemple :



Ceci est une définition intuitive. Il existe une manière plus rigoureuse de définir la continuité d'une fonction que nous n'allons pas écrire ici afin d'éviter un excès de technicité.

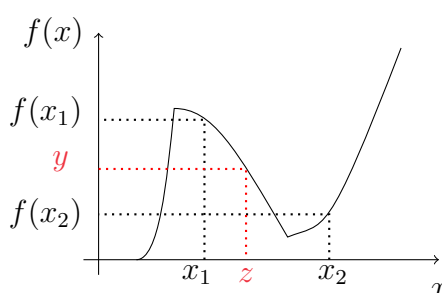
3. Les polynômes que nous avons le mois dernier, les fonctions trigonométriques ( $\cos$ ,  $\sin$ ) et (pour ceux qui les connaissent) les fonctions exponentielles et logarithmes sont continues.
4. Les sommes, différences, produits et quotients de fonctions continues sur  $I$  sont continues sur  $I$  (dans le dernier cas, il faut s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas sur  $I$  pour que le quotient soit défini).
5. Prenons maintenant  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$ . On suppose que pour tout  $x$  dans  $I$ , l'intervalle  $J$  contient  $f(x)$ . Alors on peut définir la *composition de  $f$  par  $g$*  comme la fonction  $g \circ f$  définie sur  $I$  et envoyant  $x$  dans  $I$  sur  $g(f(x))$ , l'image de  $f(x)$  par  $g$ .<sup>1</sup> Si de plus  $f$  et  $g$  sont continues alors  $g \circ f$  est continue.

---

1. Par exemple, si  $f(x) = x^2$  et  $g(y) = y + 1$ , on a  $g \circ f(x) = x^2 + 1$ .

6. En utilisant ces deux derniers faits, on peut justifier qu'une fonction est continue sans dessiner son graphe. Essayez par exemple de justifier que la fonction envoyant  $x$  sur  $\frac{2x+1}{x+5}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ <sup>2</sup>.

7. **Le théorème des valeurs intermédiaires** Soit  $f$  une fonction continue définie sur un intervalle  $I$ . Soit  $x_1, x_2$  deux éléments de  $I$  et  $y$  un nombre réel tel que  $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$ , alors il existe un nombre réel  $z$  entre  $x_1$  et  $x_2$  tel que  $y = f(z)$ . Par exemple



La fonction continue que nous avons dessinée au point 1 ne vérifie pas le théorème des valeurs intermédiaires, pouvez-vous le justifier ?

8. Montrez par vous même cette conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Soit  $f$  une fonction continue définie sur un intervalle  $I$  telle que l'équation  $f(x) = 0$  n'a aucune solution sur  $I$ , alors  $f$  est de signe constant sur  $I$  (c'est à dire, pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $f(x) > 0$  ou pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $f(x) < 0$ ). C'est en général sous cette forme là que l'on utilise la continuité d'une fonction dans les problèmes à concours.

---

2. Puisque les fonctions envoyant  $x$  sur  $2x+1$  et  $x$  sur  $x+5$  sont des polynômes, elles sont continues. En remarquant que l'unique racine de  $x+5$  est  $-5$  qui est négative donc pas dans  $]0, +\infty[$ , on voit que le quotient de ces deux fonctions est continu.

**Problème 1** (Prouver le point 8). Soit  $I$  un intervalle et  $f$  une fonction continue sur  $I$  telle que  $f(x) = 0$  n'a pas de solution sur  $I$ . Montrer que le signe de  $f$  est constant sur  $I$ .

**Problème 2.** Prenons  $a, b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$  telle que  $f(a)f(b) < 0$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution sur  $[a, b]$ .
2. Si  $c := \frac{a+b}{2}$ , justifier que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins une solution dans  $[a, c]$  ou  $[c, b]$  puis utiliser le signe de  $f(c)$  pour déterminer lequel de ces deux intervalles contient une solution à l'équation  $f(x) = 0$ .
3. Décrire un algorithme qui prend en entrée une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0)f(1) < 0$  et renvoie une approximation d'une solution à l'équation  $f(x) = 0$  sur  $[0, 1]$ .

**Problème 3.** Prenons  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f \circ g = g \circ f$ .<sup>3</sup> On suppose de plus que l'équation  $f(x) = g(x)$  n'a pas de solution. Montrer que l'équation  $f(f(x)) = g(g(x))$  n'a pas de solution non plus.

**Problème 4.** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0, 1]$  et telle que  $f(0) = f(1)$ . Trouver  $x$  dans  $[0, \frac{4}{5}]$  tel que  $f(x + \frac{1}{5}) = f(x)$ .

**Problème 5 (\*).** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[0, 1]$  et telle que  $f(0) = 0 = f(1)$ . On suppose de plus que pour tout  $x$  dans  $[0, 0.7]$ ,  $f(x + 0.3) \neq f(x)$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins 7 solutions dans  $[0, 1]$ .
2. Dessiner le graphe d'une telle fonction  $f$ .

Note : \* signifie que le problème est plus difficile.  
Envie de plus de problèmes, il suffit de demander !

---

3. Il s'agit de la composition de fonctions expliquée au point 5.