

Les ensembles

Un **ensemble** E est une collection d'éléments distincts deux-à-deux. Deux ensembles sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments (si x est un élément de E , on écrit $x \in E$ et sinon, on écrit $x \notin E$). Le **cardinal** d'un ensemble E (noté $\#E$) est le nombre de ses éléments. L'ensemble avec aucun élément est l'ensemble vide \emptyset . Un ensemble peut être fini (s'il y a un nombre fini d'éléments) ou infini.

On peut définir un ensemble en donnant la liste de ses éléments ou en distinguant ces éléments par une certaine propriété :

$$E = \{5, 10, 15, \dots, 90, 95\} = \{x : 1 < x < 100 \text{ et } x \text{ est divisible par } 5\}$$

Répéter un élément dans la liste ne change pas l'ensemble :

$$\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$$

Un **sous-ensemble** d'un ensemble E est un ensemble F tel que tout élément de F est également un élément de E (on écrit $F \subseteq E$ ou $E \supseteq F$). Les sous-ensembles de sous-ensembles de E sont des sous-ensembles de E . Si l'on a à la fois $F \subseteq E$ et $E \subseteq F$ alors $E = F$.

Combien de sous-ensembles y a-t-il dans un ensemble E ? L'ensemble vide compte comme un sous-ensemble de E , l'ensemble E est un sous-ensemble de lui-même. En plus de ceux là, ils restent de nombreuses autres possibilités. . . (Voir Problème 2).

Intersection

Quand l'on recherche plusieurs propriétés, on fait une intersection d'ensembles :

$$\{\text{nombres impairs entre 5 et 8}\} = \{\text{nombres impairs}\} \cap \{\text{nombres entre 5 et 8}\}$$

Formellement :

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$

De par la définition, $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$. Si $A \subseteq B$, alors $A \cap B = A$:

$$\{\text{nombres entre 1 et 7}\} \cap \{\text{nombres entre 1 et 5}\} = \{\text{nombres entre 1 et 5}\}$$

On peut faire l'intersection de plusieurs ensembles, l'ordre dans lequel on choisit de le faire n'a pas d'importance. Par exemple :

$$A \cap B \cap C = \{x : x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \in C\}.$$

Cela revient à faire plusieurs intersection de deux ensembles (pourriez-vous le justifier ?)

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

L'intersection d'ensembles est un sous-ensemble des ensembles donnés (pourriez-vous le justifier ?).

On dit que deux ensembles sont **disjoints** si leur intersection est l'ensemble vide. Pour plus d'ensembles on dit qu'ils **disjoints deux-à-deux**. Non seulement cela implique que l'intersection de tous les ensembles est vide mais que dès que l'on prend deux ensembles parmi eux leur intersection est vide !

Les ensembles ne sont pas disjoints deux-à-deux mais sont d'intersection vide :

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \cap \{3, 1\} = \emptyset$$

Réunion

Quand l'on autorise différentes possibilités, on utilise la réunion :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

De par la définition, $A \cup A = A \cup \emptyset = A$ et si $A \subseteq B$, alors $A \cup B = B$:

$$\{\text{nombres entre 1 et 7}\} \cap \{\text{nombres entre 1 et 5}\} = \{\text{nombres entre 1 et 7}\}$$

On peut faire l'intersection de plusieurs ensembles, l'ordre dans lequel on choisit de le faire n'a pas d'importance. Comme pour l'intersection, cela signifie simplement faire un certain nombre de fois la réunion de deux ensembles

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Différence

Si l'on veut exclure certains éléments, on utilise la différence d'ensemble. Le complémentaire de l'ensemble B dans l'ensemble A est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

De par la définition $A \setminus \emptyset = A$ et $A \setminus A = \emptyset$.

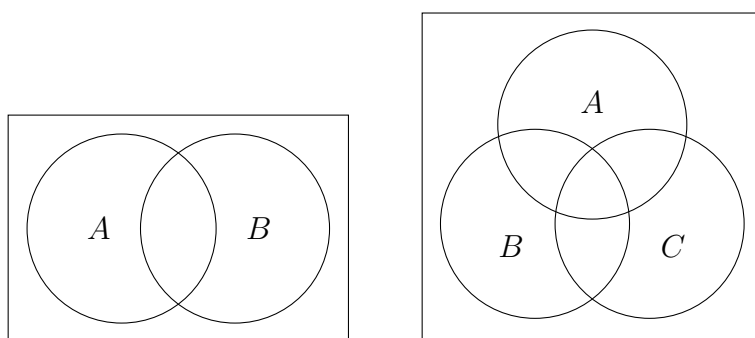
On remarquera que l'ordre dans lequel on fait les opérations et les parenthèses ont leur importance avec la différence (de même que $3 - 5 \neq 5 - 3$ et $5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2$).

- Si $A \subseteq B$, alors $A \cup (B \setminus A) = B$ mais en général, on a seulement $A \cup (B \setminus A) \supseteq B$.
- L'intersection $A \cap (B \setminus A)$ est toujours vide et de plus

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Diagramme de Venn (ou diagramme logique ou patatoïde)

Quand l'on a deux ensembles A et B , il n'y a que $4 = 2^2$ possibilités pour un élément, soit il est seulement dans A , seulement dans B , dans A et B à la fois ou ni dans l'un ni dans l'autre. On peut dessiner un diagramme avec 4 zones pour illustrer cela. Pour trois ensembles A, B, C , il y a $8 = 2^3$ possibilités. On a donc besoin de 8 zones. Pour n ensembles, il y a 2^n possibilités et donc 2^n zones. On peut aussi se contenter d'écrire un tableau pour faire la liste de tous les cas possibles. . .



Si certaines zones sont vides (soit parce que $A \subseteq B$ ou parce que A et B sont disjoints), alors on peut simplifier les diagrammes



On peut trouver pas mal de formules sur internet, par exemple

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Il vaut mieux éviter de deviner ces formules, mais plutôt se convaincre qu'elles sont pertinentes (patiemment et sans négliger de détails) avec l'aide d'un diagramme de Venn, c'est à dire que les zones recouvertes par les deux ensembles sont les mêmes. Mathématiquement cela signifie considérer tous les cas possibles ! Il est également possible de justifier que tel ensemble est sous-ensemble d'un autre à l'aide d'un diagramme de Venn.

Un diagramme de Venn peut aider à justifier que deux ensembles ne sont pas égaux (ou que l'un n'est pas contenu dans l'autre) simplement parce qu'il permet de détecter lequel des cas va poser soucis !

Partitions

Faire une partition, c'est diviser un ensemble en plusieurs parts, un peu comme on le ferait d'un gâteau :

Une **partition** d'un ensemble $E \neq \emptyset$ est une collection de sous-ensembles non-vides de E disjoints deux-à-deux dont la réunion est E .

En d'autres termes : tout sous-ensemble est non-vide et tout élément de E appartient à un et un seul sous-ensemble constituant la partition.

Exemple : Si F est un sous-ensemble non-vide de E différent de E , alors F et $E \setminus F$ forment une partition de E .

Si l'on se donne deux partitions, on dit que la seconde est *plus fine* si tout ensemble de la seconde partition est contenu dans un ensemble de la première partition. En d'autres termes on divise encore plus notre ensemble. Il se peut que pour deux partitions ni l'une ni l'autre soit plus fine que l'autre.

Exemple : Les groupes sanguins $A, B, AB, 0$ forment une partition de l'ensemble des êtres humains. Les rhésus $+, -$ forment une autre partition, et il n'y a pas de partition plus fine que l'autre parmi ces deux là.

On peut combiner les deux partitions en considérant toutes les intersections non-vides apparaissant entre les ensembles d'une partition et d'une autre. Dans l'exemple ci-dessus on obtient les types sanguins :

$$A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, 0+, 0- .$$

Le principe d'Inclusion-Exclusion (ou la formule du crible)

Quand l'on compte les éléments de A puis les éléments de B , on a compté deux fois les éléments de $A \cap B$. C'est la raison pour laquelle on a la formule suivante :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

On peut généraliser la formule pour 3 ensembles (et même pour n ensembles !) :

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

En général, le cardinal de la réunion est plus petit que la somme des cardinaux :

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \#A_1 + \#A_2 + \dots + \#A_n$$

On a égalité si les A_i sont disjoints deux-à-deux. Pour cette raison, il est souvent pertinent de travailler avec des ensembles disjoints deux-à-deux et en particulier avec des partitions !

Problèmes autour des ensembles

1. **Jouer avec la logique** : L'intersection des ensembles a un rapport avec le mot 'et', la réunion avec 'ou' et le complémentaire avec le 'non'. Pouvez-vous expliquer les lois suivantes (appelées les lois de Morgan) ?

On écrit ici \complement pour parler du complémentaire dans un ensemble donné :

$$A^{\complement} \cup B^{\complement} = (A \cap B)^{\complement}$$

$$A^{\complement} \cap B^{\complement} = (A \cup B)^{\complement}$$

Rappel du thème de logique un 'non' échange les 'et' et 'ou'

2. **Avec la récurrence** : Combien de sous-ensembles y a-t-il dans un ensemble à 1, 2 et 3 éléments ? Pouvez-vous deviner le nombre de sous-ensembles pour n éléments ?

Ensuite, essayez de démontrer la formule à l'aide du principe de récurrence. . . Dans l'hérédité de n à $n + 1$, on considère un ensemble à $n + 1$ éléments dont on distingue un élément X . On commence par compter tous les sous-ensembles sans X , puis tous les sous-ensembles avec X .

Relisez le thème sur la récurrence pour savoir comment marche une récurrence !

3. **SOS Diagramme de Venn** : Montrer la chose suivante en utilisant les diagrammes de Venn : "Si $A \subseteq B$, alors $A \cup (B \setminus A) = B$."

Trouver un contre-exemple si l'on a pas $A \subseteq B$.

4. **Dilemmes** : Prenons A, B deux ensembles. La formule $\#A = \#(A \cap B) + \#(A \setminus B)$ est-elle toujours vraie ? La formule $\#A = \#B + \#(A \setminus B)$ est-elle toujours vraie ?
5. **Choisir le bon** : Laquelle de ces collections forme une partition de $E = \{a, b, c, d\}$, et pourquoi ?

(1) $T_1 = \{a\}, T_2 = \{b, d\}, T_3 = \{c, c\}$

(2) $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{b, c\}, T_3 = \{d\}$

(3) $T_1 = \{a, b\}, T_2 = \{d\}$

6. **Dénombrement d'antigènes** Via une analyse de sang sur 300 personnes, on obtient les résultats suivants : 150 personnes ont l'antigène A , 120 ont l'antigène B et 100 n'en ont aucun. Combien ont les deux ?

7. **Aerobic, ballet ou criquet ?** Durant la journée des sports, 64 élèves ont choisi des activités sportives parmi Aerobic (A), Ballet (B) ou Criquet (C). On dispose des informations suivantes :

2 n'ont rien fait ;

34 ont essayé (A), 30 ont essayé (B), 33 ont essayé (C) ;

11 ont essayé (A) et (B), 15 ont essayé (B) et (C), 17 ont essayé (A) et (C) ;

19 ont essayé exactement deux activités parmi (A),(B),(C).

Combien d'élèves ont essayé chacune des activités (A),(B),(C) ?

Combien d'élèves ont essayé seulement (A) ?

Combien d'élèves ont essayé (C) et (B), mais pas (A) ?

Une question ? Il suffit de la poser !