

Équations fonctionnelles

Dans les concours mathématiques, on retrouve souvent des problèmes autour des équations fonctionnelles : nous vous présentons quelques astuces et des exemples abordables !

Vous avez déjà vu des équations dont les solutions sont des nombres réels, par exemple $x + 3 = 5$. Il peut y avoir plus d'une solution ($x^2 - 9 = 0$) ou peut-être aucune ($x^2 + 9 = 0$). En mathématiques, on retrouve aussi des équations dont les solutions sont des fonctions. On appelle de telles équations des *équations fonctionnelles*.

Cela signifie que, au lieu de chercher l'ensemble des nombres réels vérifiant une certaine propriété, il faut chercher l'ensemble des fonctions vérifiant une certaine propriété. Pour simplifier, on ne s'intéresse qu'à des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, autrement dit des fonctions définies sur tous les nombres réels et à valeurs réelles. Parmi ces fonctions, on retrouve les fonctions affines ($x \mapsto 2x + 5$), et plus généralement les fonctions polynomiales ($x \mapsto 2x^7 + 5x^2 + 1$). Tout particulièrement, on y retrouve les fonctions constantes ($x \mapsto 5$).

Vérifier si une fonction est solution. Il est facile de vérifier si un nombre réel est solution ou non d'une équation donnée : il suffit de remplacer l'inconnue de l'équation par le nombre réel et voir si l'identité en question est vérifiée ou non (2 est solution de $x^3 - 3 = 5$, mais pas 7). Pour les équations fonctionnelles, cela fonctionne de la même façon, on remplace la fonction inconnue de l'équation fonctionnelle par la solution potentielle et on vérifie si l'on retrouve l'identité ou non.

Par exemple, prenons l'équation fonctionnelle :

$$2f(x) = f(2x)$$

Vous pouvez vérifier facilement que la fonction constante égale à 0 et que la fonction $x \mapsto 7x$ sont solutions (les égalités $2 \cdot 0 = 0$ et $2 \cdot 7x = 7 \cdot 2x$ sont justes) mais la fonction $x \mapsto x + 1$ n'est pas solution (l'égalité $2 \cdot (x + 1) = 2x + 1$ n'est pas vraie pour tout x).

Sur l'ensemble des solutions. Il n'y a parfois aucune solution à une équation fonctionnelle :

$$f(x)^2 = -1$$

n'a pas de solution (le carré d'un nombre est toujours positif) et l'ensemble des solutions est vide.

Il n'y a parfois qu'une solution à une équation fonctionnelle :

$$f(x)^2 = 0$$

implique que $f(x) = 0$ pour tout x , la seule possibilité pour être solution est donc la fonction constante égale à 0. On vérifie que c'est un candidat valide ($0^2 = 0$) donc il n'y a qu'une solution, à savoir la fonction constante égale à 0.

Il y a parfois (beaucoup) plus d'une solution :

$$f(x)^2 = 1$$

vous devinerez facilement que les fonctions constantes égales à 1 ou à -1 sont toutes deux solutions. Mais l'ensemble des solutions contient une infinité de fonctions, à savoir les fonctions f vérifiant $f(x) = \pm 1$ pour tout x mais où le signe dépend de x . Par exemple on peut définir la fonction f qui vaut 1 sur les rationnels et -1 sur les irrationnels, c'est une fonction définie sur tous les réels parfaitement légitime. Plus simplement, on peut définir la fonction f qui vaut 1 sur les réels positifs et -1 sur les réels strictement négatifs qui est également solution de l'équation fonctionnelle.

Trouver toutes les solutions. En utilisant différentes astuces (qui peuvent changer selon l'équation fonctionnelle considérée), on trouve des conditions qui peuvent permettre de resserrer l'ensemble des solutions : *toutes les solutions sont d'une certaine forme*. Pour déterminer exactement l'ensemble des solutions, il faut également vérifier que *toutes les fonctions de cette forme sont solutions*. Bien sûr, si les conditions trouvées dans la première étape sont si restrictives qu'il n'y a aucune fonction vérifiant toutes les conditions, on a montré que l'ensemble des solutions est vide et il n'y a plus rien à faire.

Astuce : le changement de variables. On a toujours le droit de changer les variables, par exemple, en posant $t = x + 1$ on change l'équation fonctionnelle où l'on a une fonction de x en une équation fonctionnelle où l'on a une fonction de t :

$$f(x+1) = x^2 + 2x + 5 \quad \leftrightarrow \quad f(t) = t^2 + 4$$

Cela fait directement apparaître l'unique solution $x \mapsto x^2 + 4$. Quand les variables ne parcourent pas forcément tout l'ensemble des réels, il faut se souvenir qu'en changeant la variable on change aussi son domaine.

Astuce : la spécialisation de l'équation fonctionnelle. En présence d'une équation fonctionnelle où la variable est x , on peut fixer la variable x (par exemple $x = 0$). Cela simplifie toujours l'équation (parfois trop) et peut permettre d'obtenir, quand la spécialisation est judicieusement choisie, des informations substantielles sur l'ensemble des solutions. Par exemple, pour

$$f(x) + f(2x) = 2$$

fixer $x = 0$ impose $f(0) + f(0) = 2$ et donc $f(0) = 1$ (c'est une équation ordinaire d'inconnue $f(0)$). Par contre, pour

$$f(x) = f(-x)$$

fixer $x = 0$ donne $f(0) = f(0)$ et donc aucune information sur $f(0)$.

La spécialisation est particulièrement efficace quand plusieurs variables apparaissent dans l'équation fonctionnelle (qui, pour simplifier, varient sur tous les nombres réels). Par exemple dans

$$f(x) + f(y) = x + 3y$$

vous pouvez tester $x = 0$, mais aussi $x = y$ et ainsi de suite... En posant $x = y$ on obtient $f(x) + f(x) = 4x$ et ainsi on obtient $f(x) = 2x$. Attention, on n'a pas terminé puisque cette fonction n'est pas solution, en effet $2x + 2y = x + 3y$ n'est pas juste pour tout x, y (en fait, ce n'est vrai que quand $x = y$).

Il faut choisir la spécialisation en fonction de l'équation fonctionnelle, cela s'apprend avec le temps. Parfois la spécialisation est un peu inhabituelle. La spécialisation $x = f(y)$ dans l'équation fonctionnelle :

$$f(y) = x + 2y$$

nous donne $f(y) = f(y) + 2y$ et donc $y = 0$. Ceci ne peut pas être vrai puisque y peut prendre n'importe quelle valeur réelle (dans la spécialisation $x = f(y)$ la variable x est déterminée par y mais y prend n'importe quelle valeur). Il n'y a donc aucune solution à l'équation fonctionnelle ci-dessus !

Astuce : symétrie. Par exemple, dans l'équation fonctionnelle

$$f(x) + f(y) = x + 3y$$

le membre de gauche ne change pas si l'on échange x et y . Ainsi si l'on avait une fonction f vérifiant effectivement l'équation fonctionnelle, le membre de droite de l'égalité devrait également être invariant si l'on échange x et y . Autrement dit, on devrait avoir $x + 3y = y + 3x$, ce qui impose $x = y$ et contredit le fait que x et y puissent varier indépendamment l'un de l'autre sur \mathbb{R} . L'ensemble des solutions est donc vide.

1. Déterminer si $f(x) = 2x + 5$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) est une solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x) + 2 = f(x + 1).$$

Peut-on trouver des solutions $x \mapsto f(x)$ telles que $f(0) = f(1) = 0$?

Solution : En remplaçant $f(x)$ par $2x + 5$ et $f(x + 1)$ par $2(x + 1) + 5$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$2x + 5 + 2 = 2(x + 1) + 5$$

qui est une identité qui reste vraie pour tout x . On en déduit que $x \mapsto 2x + 5$ est bien solution. En spécialisant l'équation fonctionnelle via $x = 0$, on trouve $f(0) + 2 = f(1)$. La condition $f(0) = f(1) = 0$ ne peut donc être satisfaite pour aucune fonction f .

2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x + y) = x + f(y)$$

Solution : En spécialisant l'équation fonctionnelle en $y = 0$, on trouve $f(x) = x + f(0)$. Remarquons que $r = f(0)$ est un nombre réel. Réciproquement, pour un r fixé, $x \mapsto x + r$ satisfait l'équation fonctionnelle ($x + y + r = x + (y + r)$). Par conséquent, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions $x \mapsto x + r$ où $r \in \mathbb{R}$ est un réel donné.

3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x + 2y) = x + 1 + 2f(y)$$

Solution : On commence par spécialiser l'équation fonctionnelle en $y = 0$ et on obtient l'équation fonctionnelle $f(x) = x + 1 + 2f(0)$. On spécialise à nouveau l'équation fonctionnelle en $x = 0$ et on obtient $f(0) = -1$. On en déduit que les solutions sont de la forme $x + r$ avec $r \in \mathbb{R}$ et l'on doit également avoir $f(0) = r = -1$. On trouve alors au plus une solution, à savoir $x \mapsto x - 1$. Cette fonction est effectivement solution de l'équation fonctionnelle comme on peut le vérifier en substituant directement ses valeurs dans l'équation fonctionnelle : $x + 2y - 1 = x + 1 + 2(y - 1)$.

4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x + y) + f(x + f(y)) = f(f(x + y))$$

Solution : On spécialise en $x = 0$ et on obtient l'équation fonctionnelle :

$$f(y) + f(f(y)) = f(f(y))$$

et donc $f(y) = 0$. Puisque ceci doit être vérifié pour tout y , on en conclut que la seule solution possible est la fonction constante égale à 0. On vérifie alors que la fonction constante égale à 0 est solution : $0 + f(x + 0) = f(f(0))$ et donc $0 + 0 = 0$ qui est inconditionnellement vraie.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x^2 + y) + f(1) = 2f(x)y + f(y - 1) + f(x^2)$$

et telle que $f(0) = 1$, que peut-on dire de $f(2)$?

Solution : En spécialisant en $x = 0$ et $y = 1$ l'équation fonctionnelle, on obtient

$$f(1) + f(1) = 2f(0) + f(0) + f(0)$$

et donc $f(1) = 2$. En spécialisant l'équation fonctionnelle en $x = 1$ et $y = 1$, on obtient

$$f(2) + f(1) = 2f(1) + f(0) + f(1)$$

et donc $f(2) = 5$.