

Inégalités

On donne ici quelques astuces pour démontrer une inégalité.

Les carrés sont toujours positifs ! Pour tout nombre réel a , on sait que $a^2 \geq 0$. Cette simple remarque peut permettre de démontrer un certain nombre d'inégalités. Le problème est, bien sûr, de savoir quelle expression l'on doit mettre au carré pour en déduire l'inégalité. Il faut en général plusieurs tentatives avant d'arriver à la bonne expression.

Utiliser la monotonie de certaines fonctions ! Prenons f une fonction qui envoie un réel x sur un réel $f(x)$. On peut par exemple avoir f_1 envoyant x sur $3x - 13$, f_2 envoyant x sur $x^3 + 1$ ou encore la fonction tangente "tan" envoyant un angle θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sur $\tan(\theta) := \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. On dit qu'une fonction est *croissante* (respectivement *décroissante*) si pour tous nombres réels x et y tels que $x \leq y$, on ait $f(x) \leq f(y)$ (respectivement $f(x) \geq f(y)$). Les fonctions f_1 , f_2 et tan mentionnées ci-dessus sont, par exemple, croissantes.

Il arrive parfois que pour démontrer une inégalité, il suffise de l'écrire sous la forme $f(x) \leq f(y)$ où f est croissante et $x \leq y$. Si l'on fait cela, il faut s'assurer de pouvoir effectivement démontrer que x est plus petit que y !

Démontrer l'inégalité dans des cas particuliers ! Quand on ne sait plus quoi faire pour démontrer une inégalité, on peut toujours essayer de fixer des paramètres ou des variables. Cela rend l'inégalité plus facile à démontrer et une démonstration de l'inégalité dans un cas particulier peut sûrement donner des pistes pour comprendre ce qui se passe dans le cas général !

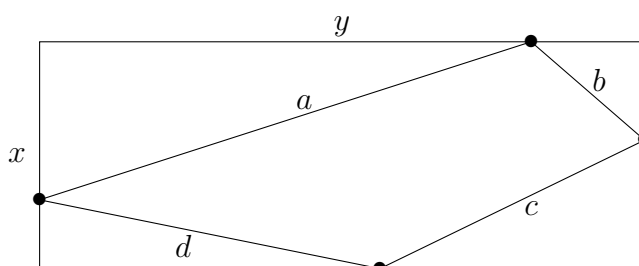
Inégalité 1 (Inégalité arithmético-géométrique). Soient a et b deux réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Inégalité 2. Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

Inégalité 3. Considérons un rectangle dont les côtés sont de longueur x et y . Sur chaque côté, on choisit un point. On note a, b, c et d les longueurs des segments reliant ces points comme sur la figure.



Montrer que

$$1 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{x^2 + y^2} \leq 2.$$

Donner la (les) configuration(s) de points pour que l'inégalité de gauche soit une égalité. Même question pour l'inégalité de droite.

Inégalité 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des nombres réels positifs. Montrer

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Justifier de plus que l'on a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si l'on peut trouver un nombre réel r tel que $a_i = rb_i$ pour tout i ou $b_i = ra_i$ pour tout i .

Inégalité 5. Montrer que parmi 5 nombre réels, on peut toujours trouver a et b tels que

$$0 \leq \frac{a-b}{1+ab} \leq 1.$$

TOUT EXERCICE RÉSOLU EST UN GRAND SUCCÈS !

Ne vous découragez pas si vous ne trouvez pas de suite la solution... Ces exercices sont conçus pour vous faire réfléchir, il faut donc prendre son temps. De toute façon, vous pouvez toujours nous demander des conseils !

Envie de plus d'inégalités ? Il suffit de demander !