

Logique élémentaire

If and only if / Si et seulement si / Genau dann, wenn

La logique est au centre de toutes les mathématiques, vrai signifie 'toujours vrai'. Quelque chose qui est 'souvent vrai' est dit faux.

Négation : Nier une assertion la fait passer du vrai au faux et vice-versa. Nier une affirmation deux fois ne change pas l'assertion :

$$2 + 3 \text{ est égal } 5 \text{ (vrai)} \leadsto 2 + 3 \text{ n'est pas égal } 5 \text{ (faux)} \leadsto 2 + 3 \text{ est égal } 5 \text{ (vrai)}$$

Et, ou : En liant deux assertions via le connecteur 'et', la seule façon d'obtenir que la phrase entière soit vraie est que les deux assertions soient vraies :

$$2 + 3 = 5 \text{ (vrai)} \text{ et } 4 + 5 = 8 \text{ (faux)} \quad \text{est une phrase fausse}$$

En liant deux assertions via le connecteur 'ou', il suffit que l'une des deux assertions soit vraie pour que la phrase entière soit vraie :

$$2 + 3 = 5 \text{ (vrai)} \text{ ou } 4 + 5 = 8 \text{ (faux)} \quad \text{est une phrase vraie}$$

Si l'on utilise le connecteur 'ou bien'... 'ou bien' pour lier deux assertions, il faut que l'une des assertions soit vraie et l'autre fausse pour que la phrase entière soit vraie :

$$\text{Ou bien } 2 + 3 = 5 \text{ (vrai)} \text{ ou bien } 4 + 5 = 9 \text{ (vrai)} \quad \text{est une phrase fausse}$$

La négation échange et et ou! La négation de "Je veux de la pizza et des pâtes" est "Je ne veux pas de pizza ou je ne veux pas de pâtes". Peut-être que je ne veux que de la pizza, que des pâtes ou ni l'un ni l'autre... La négation de "Je veux aller au cinéma ou au théâtre" est "Je ne veux pas aller au cinéma et je ne veux pas aller au théâtre". Je ne veux aller ni à l'un ni à l'autre !

Implication : Le mot **Si** suggère une implication : 'Si tu fais ci, alors je ferais ça'. Il y a une prémisses (tu fais ci) et une conséquence (je fais ça). Une implication dans son entier est vraie *sauf si la prémisses est vraie et la conséquence est fausse*. Par exemple, ton/ta patron(ne) peut te dire quelque chose comme :

Si tu viens en retard au travail, tu es viré(e).

Il y a probablement d'autres comportements qui peuvent justifier un licenciement (on peut être viré(e) même si l'on est ponctuel(le)) mais ton/ta patron(ne) ne se dédit pas sauf si tu viens en retard au travail et qu'il/elle ne te vire pas.

En général, on ne peut pas échanger prémisses et conséquences :

Si tu as deux bonbons, alors tu en as un nombre pair (vrai)

Si tu as un nombre pair de bonbons, alors tu en as deux (faux)

Nécessité : Le constructeur **seulement si** suggère une condition nécessaire

Tu peux avoir 2 bonbons, **seulement si** tu en as un nombre pair (vrai)

Équivalence : Deux conditions sont équivalentes l'une à l'autre signifie que l'une est nécessaire et suffisante pour avoir l'autre :

Tu as deux bonbons **si et seulement si** tu en as un nombre pair entre 1 et 3 (vrai)

Contraposition (d'une implication) : L'implication 'Si A, alors B' ($A \Rightarrow B$) est rigoureusement identique à l'implication 'Si non B, alors non A' ($\neg B \Rightarrow \neg A$).

Si un triangle a 3 angles égaux, alors 2 de ses angles sont égaux

Si 2 des angles d'un triangle ne sont pas égaux, alors il ne peut avoir 3 angles égaux

Transitivité de l'implication : Avec les deux implications 'Si A, alors B' et 'Si B, alors C', on en déduit automatiquement l'implication 'Si A, alors C'. Par exemple, 'Si je suis à Belval, alors je suis au Luxembourg' et 'Si je suis au Luxembourg, alors je suis en Europe', j'en déduis automatiquement : 'Si je suis à Belval, alors je suis en Europe'.

Une **règle** est habituellement exprimée en utilisant les mots " Chaque", " Tous"... :

Chaque triangle a trois côtés. Tous les triangles ont trois côtés.

Une règle est fausse même s'il n'y a qu'une seule exception (contre-exemple). Vérifier la règle sur quelques exemples n'est pas démontrer une règle .

Un **exemple** (ou un contre-exemple) est généralement exprimé sous la forme d'un " il y a/il existe" :

Il y a un mammifère capable de courir à 30km/h.

Il existe un mammifère capable de courir à 30km/h.

En mathématiques, "il y a un élément" signifie "il y en a au moins un" (on peut aussi dire 'on peut trouver un élément').

La négation échange "Tout" et "Il y a" :

La négation de "Tous les mammifères peuvent courir à 50km/h." est "Il y a un mammifère qui peut courir à 50km/h."

La négation de "Aucun mammifère ne peut courir à 100km/h." est "Il y a un mammifère qui peut atteindre la vitesse de 100km/h."

- "Pour tout x et pour tout y " est identique à "Pour tout y and pour tout x ".

Pour tout singe et pour tout arbre, le singe peut grimper sur l'arbre.

Pour tout arbre et pour tout singe, le singe peut grimper sur l'arbre.

De manière équivalente, cela signifie : Tous les singes peuvent grimper sur tous les arbres (pas d'exception, ni pour les singes, ni pour les arbres).

- "Il y a un x et il y a un y " est identique à "Il y a un y et il y a un x ".

Il y a un arbre et il y a un chat tels que le chat puisse grimper sur l'arbre.

Il y a un chat et il y a un arbre tels que le chat puisse grimper sur l'arbre.

Ici, il me suffit de savoir que mon chat puisse grimper sur l'arbre dans mon jardin. Il y a plein d'assertions différentes qui peuvent être vraies en même temps que l'assertion ci-dessus, peut-être un arbre est trop grand pour tout chat, ou un chat ne peut grimper sur aucun arbre ou chaque chat peut grimper sur un arbre ou tous les chats peuvent grimper sur tous les arbres. ...

- "Il y a un y , tel que pour tout x " est souvent plus fort que "Pour tout x , il existe y ". Dans le premier cas le y est le même quelque soit x :

Pour tout animal, il y a une nourriture appropriée (vrai)

Il y a une nourriture qui est appropriée pour chaque animal (faux)

Problème autour de la logique

1. **Oui ou non ?** Associer correctement un souhait à sa négation (et justifier son choix) :
Regardons Star Wars ou Star Trek !
Regardons Star Wars et Star Trek !
Ne regardons pas Star Wars ou ne regardons pas Star Trek !
Ne regardons pas Star Wars et ne regardons pas Star Trek !
2. **Poissons et requins** Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont équivalentes ? lesquelles sont vraies ?
 - (a) requin \Rightarrow poisson
 - (b) poisson \Rightarrow requin
 - (c) poisson \Leftrightarrow requin
 - (d) pas un poisson \Rightarrow pas un requin
 - (e) pas un requin \Rightarrow pas un poisson
 - (f) pas un poisson \Leftrightarrow pas un requin
3. **Logique du zèbre** Les zèbres sont noirs et blancs. Les vieux films sont noirs et blancs. Par conséquent, les zèbres sont des vieux films ! Où est le problème dans ce raisonnement ?
4. **Un zoo de possibilités** Ordonner les assertions suivantes de la plus forte à la plus faible (est-ce qu'il y en a deux qui sont équivalentes) :
 - (a) Au zoo, il y a un animal qui vole ou nage
 - (b) Au zoo, il y a un animal qui vole ou il y a un animal qui nage
 - (c) Au zoo, il y a un animal qui vole et nage
 - (d) Au zoo, il y a un animal qui vole et il y a un animal qui nage
5. **Darwin !** Darwin et Mendel ont étudié les plantes, mais on ne sait pas lesquelles. Parmi les assertions suivantes, il y en a deux qui peuvent être vraies en même temps et fausses en même temps. Il y en a deux qui peuvent être fausses en même temps mais ne peuvent être vraies en même temps. Lesquelles ?
 - (a) Darwin a étudié toutes les plantes que Mendel a étudiées.

- (b) Il existe une plante que Mendel a étudiée et que Darwin a également étudiée, mais Darwin n'a pas étudié toutes les plantes que Mendel a étudiées.
- (c) Il y a une plante que Mendel a étudiée que Darwin n'a pas étudiée.

6. **Une question de préférence** Laquelle de ces assertions est la plus forte ? Peut-on en trouver deux qui signifie rigoureusement la même chose ?

- (a) Chaque élève a apprécié chaque film que l'on a passé à l'école.
- (b) Chaque film qui a été passé à l'école a été apprécié par un des élèves.
- (c) Un des élèves a apprécié tous les films passés à l'école.
- (d) Parmi tous les films passés à l'école, il y en a un qui a été apprécié par tous les élèves.
- (e) Chaque élève a apprécié un des films passés à l'école.

Une question ? Il suffit de nous la poser !