

Pavages et découpages

Rectangles et triangles

Un **pavage** est un recouvrement d'une figure géométrique par différentes copies d'une même figure. Un **domino** est une figure géométrique rectangulaire d'une unité sur k unités. Par pavage on sous-entend souvent pavage par des dominos.

Peut-on recouvrir un échiquier (de taille 8×8) dont a enlevé deux coins opposés par des dominos (de taille 1×2) ?

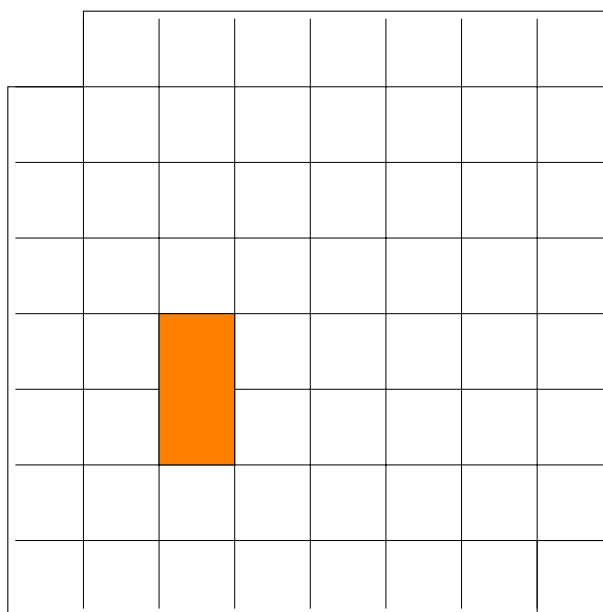


FIGURE 1 – Un échiquier après avoir enlevé deux coins opposés

La réponse à cette question est NON. Pour montrer cela, il faut chercher une quantité *invariante*. Par quantité invariante, on veut dire une quantité qui ne varie pas durant le pavage. Si cette quantité invariante est différente pour une figure pavée et la figure géométrique à paver, alors on ne peut paver entièrement la figure géométrique.

Pour voir cette quantité, il suffit de colorier les cases de l'échiquier en noir et blanc (voir Figure ??). On y fait également apparaître les coins noirs que l'on a enlevés de l'échiquier original.

Chaque domino dans un pavage de cette figure va recouvrir une case noire et une case blanche. Par conséquent une figure recouverte par un certain nombre de dominos (aussi compliquée que puisse être la figure) aura toujours un nombre identique de cases noires et de cases blanches (autrement dit la quantité invariante est la différence entre le nombre de cases noires et le nombre de cases blanches). Or l'échiquier auquel on

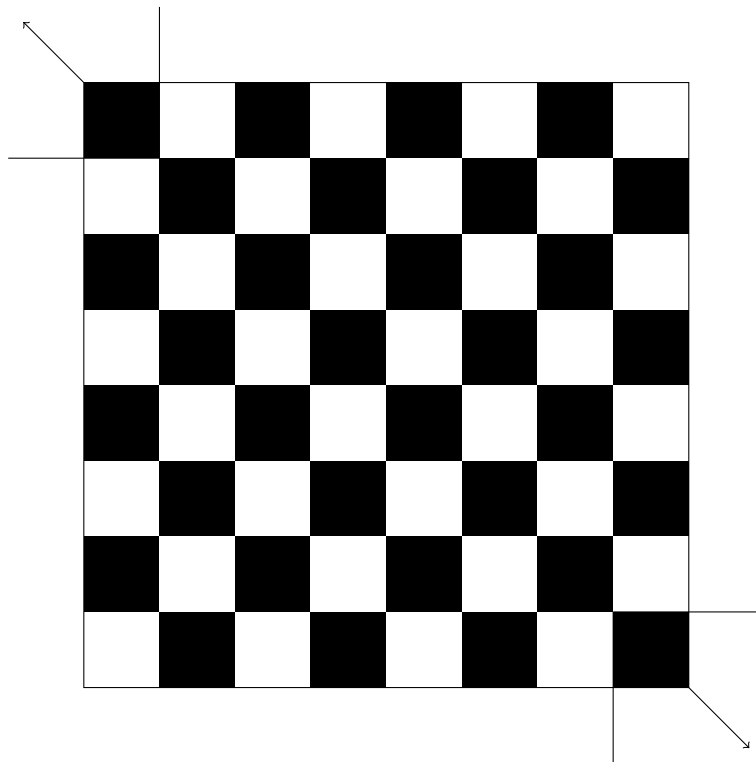


FIGURE 2 – Le coloriage régulier d'un échiquier

a enlevé les deux cases noires au coin contient strictement plus de cases blanches que de cases noires. D'après ce que l'on vient de faire elle ne peut être recouverte entièrement par des dominos.

Quand l'on cherche à faire un pavage d'un modèle donné, on peut essayer d'abord avec un modèle plus petit. Cela permet parfois de comprendre *ce qu'il se passe* dans l'exercice.

Plus généralement, un **découpage** d'un ensemble est un recouvrement d'une figure géométrique par différentes petites figures géométriques données (pas forcément identiques les unes aux autres). La différence principale entre un pavage et un découpage est que pour le second, on autorise différents modèles dans le découpage. En général, on découpe une figure géométrique en carrés ou en triangles.

Les exercices qui suivent ne demandent pas de connaître des résultats mathématiques profonds. Il suffit de dessiner et de réfléchir.

1. Albert s'est acheté une tablette de chocolat que l'on choisit de représenter comme une grille rectangulaire de 4 carrés par 6 carrés comme sur la Figure 3 ci-dessous.

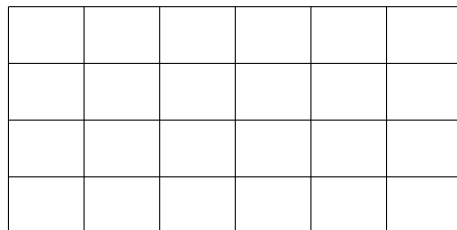


FIGURE 3 – Tablette de chocolat

À chaque étape, Albert casse un bout de sa tablette en deux le long d'une ligne verticale ou horizontale. De combien d'étapes a besoin Albert, au minimum, pour obtenir ses 24 carrés de chocolat détachés les uns des autres ?

2. Montrer que l'on peut découper un carré en n carrés plus petits pour tout $n \geq 6$. Montrer que cela est impossible pour $n = 5$.

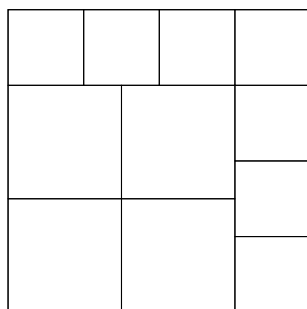


FIGURE 4 – Découpage d'un carré en 11 carrés plus petits

3. On enlève une case d'un échiquier (8 cases par 8). Montrer que l'on peut paver cette figure géométrique par des dominos en forme de L (voir Figure ??).

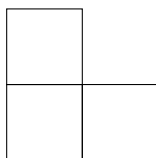


FIGURE 5 – Un domino en forme de L

4. On enlève un coin de notre échiquier. Peut-on paver cette figure géométrique avec des dominos de taille 1 par 3 (voir Figure ??) ?

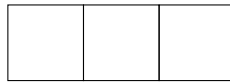


FIGURE 6 – Un domino de taille 1 par 3

5. Montrer qu'un rectangle de 10 par 6 ne peut être pavé par des dominos en forme de L , 2 par 3 (voir Figure ??).

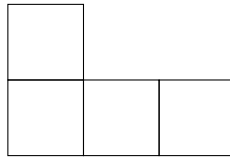


FIGURE 7 – Un domino en forme de L de taille 2 par 3

6.

- Montrer que tout triangle peut être pavé avec 4 triangles.
- Montrer que tout triangle peut être pavé avec 9 triangles.
- Donner un exemple de triangle que l'on peut paver avec 5 triangles.

7. Partant de la Figure ??, peut-on arriver à un tableau où tous les signes sont des « + » sachant qu'à chaque étape on ne fait que changer tous les signes sur une ligne, une colonne ou une diagonale ?

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

FIGURE 8 – Un tableau avec des signes

8. On dit qu'un échiquier est *déficient* si l'on a enlevé une case de l'échiquier. On dit qu'une figure peut être pavé *par des figures en L* si l'on peut paver la figure avec des éléments comme sur la Figure ?. En suivant les étapes qui suivent, on montre que tout échiquier déficient de taille n par n peut être pavé avec des figures en L si et seulement si $n \neq 5$ et n non-divisible par 3.

- a. Montrer que certains échiquiers défectueux de taille 5×5 peuvent être pavés avec des figures en L et d'autre non.
- b. Montrer que tout échiquier de taille $2k \times 3l$ avec $k, l \in \mathbb{N}$ peut être pavé avec des figures en L (on n'enlève pas de case).
- c. Montrer qu'aucun échiquier défectueux de taille $n \times n$ ne peut être pavé avec des figures en L si n est divisible par 3.
- d. Montrer que tout échiquier défectueux de taille 7×7 ou 11×11 peut être pavé avec des figures en L.
- e. Montrer que tout échiquier de taille $6k \times l$ avec $k, l \in \mathbb{N}$ et $l \geq 2$ peut être pavé avec des figures en L (on n'enlève pas de case).
- f. Montrer que tout échiquier défectueux de taille $(m + 6k) \times (m + 6k)$ peut être pavé avec des figures en L, quelque soit $k \in \mathbb{N}$ et m vérifiant $m \geq 11$ et m non-divisible par 3.

L'ordre des exercices ne reflète pas leur difficulté.

N'hésitez pas à envoyer des solutions, même si vous les pensez incomplètes !