

Racines de polynômes

1. Un *polynôme* est une fonction associant à un nombre x , une somme de puissances positives de x multipliées par des constantes appelées *coefficients*. Par exemple, $x \mapsto x^3 + 5x^2 - \frac{1}{7}x + \pi$ est un polynôme.

Le *degré* d'un polynôme non-nul P est l'entier d telle que x^d soit la plus grande puissance dans le polynôme P . On le notera $\deg P$. Par définition, $\deg 0 = -\infty$. Si P et Q sont des polynômes, on voit facilement que $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

Le *coefficient dominant* d'un polynôme P est le coefficient devant $x^{\deg P}$.

On dit qu'un polynôme P est à *valeurs entières* si pour tout entier k , $P(k)$ est un entier.

Soit P un polynôme, on dit qu'un nombre réel a est une *racine* de P si $P(a) = 0$. En d'autres termes, a est solution de l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue x .

2. Il existe une méthode générale pour trouver les racines de polynômes de degré 2. Soit $a \neq 0$, b et c trois nombres réels et $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Une racine x de P vérifie $ax^2 + bx + c = 0$. On commence par écrire le polynôme sous une *forme canonique* :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + a \times 2\frac{b}{2a}x + c = a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x \right) + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c$$

L'équation est alors équivalente à $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Il y a trois cas qui dépendent du signe de $\Delta := b^2 - 4ac$. On appelle cette quantité le *discriminant* de P .

— Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution car tout carré est positif.

— Si $\Delta = 0$, alors $x = -\frac{b}{2a}$ est l'unique solution.

— Si $\Delta > 0$, alors $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ et

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

sont les deux solutions de l'équation.

3. Soit P un polynôme et x_0 une racine de P , alors il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - x_0)Q(x)$. De plus, on peut calculer les coefficients de Q . En effet si $P(x) = a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$ et $Q(x) = b_{d-1}x^{d-1} + \dots + b_0$ alors

$$\begin{aligned} a_dx^d + \dots + a_0 &= (x - x_0)(b_{d-1}x^{d-1} + \dots + b_0) \\ &= b_{d-1}x^d + (b_{d-2} - x_0b_{d-1})x^{d-1} + \dots + (b_0 - x_0b_1)x - x_0b_0 \end{aligned}$$

Puisque les coefficients devant les puissances de x doivent coïncider des deux côtés, on peut calculer b_{d-1} à partir de $a_d = b_{d-1}$. Ensuite b_{d-2} à partir de $a_{d-1} = b_{d-2} - x_0 b_{d-1}$, etc., et enfin b_0 à partir de $a_1 = b_0 - x_0 b_1$. La dernière équation $a_0 = -x_0 b_0$ est redondante, si elle n'est pas vérifiée c'est qu'il y a une erreur dans votre calcul. Par exemple, sachant que 1 est une racine du polynôme $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, pourriez-vous le factoriser ? ¹

En vertu de cette propriété de factorisation, le nombre de racines d'un polynôme non-nul est limité par leur degré. Si P est un polynôme de degré d avec d racines distinctes x_1, \dots, x_d et coefficient dominant a_d alors

$$P(x) = a_d(x - x_1) \times \dots \times (x - x_d).$$

4. Trouver les racines d'un polynôme est un problème très compliqué en général. On peut néanmoins l'astuce d'Eisenstein pour trouver des racines entières. Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers. Si l'entier z est une racine de P , alors

$$0 = P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \text{ et donc } z(a_n z^{n-1} + \dots + a_1) = -a_0,$$

par suite z divise $-a_0 = -P(0)$. Ainsi les racines entières de P sont à rechercher parmi les diviseurs de $\pm a_0$.

5. Soit P un polynôme de degré 2, alors $P(x) = ax^2 + bx + c$. D'un autre côté, si P a deux racines réelles x_1 et x_2 , alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. En développant ce produit on obtient

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \text{ et } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Soit P un polynôme de degré 3, alors $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. D'un autre côté, si P a trois racines réelles x_1, x_2 et x_3 alors $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. En développant ce produit, on peut vérifier que

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}, x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a} \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}.$$

Ces formules sont appelées les formules de Viéta. Elles font le lien entre les racines d'un polynôme et ses coefficients. Les formules de Viéta existent pour des polynômes de degré arbitrairement grand. Pourriez-vous deviner ces formules ?

1. On écrit $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ et on développe : $ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$. Ainsi $a = 1$, $b - a = -2$, $c - b = 3$ et $-c = -2$. Par conséquent $a = 1$, $b = -1$ et $c = 2$.

Problème 1. On suppose que la différence des deux racines de $x^2 + bx - 7$ vaut $5\sqrt{\frac{7}{2}}$, que vaut b ?

Problème 2. Quelles sont les racines réelles du polynôme $x^3 + 6x^2 + 15x + 14$?

Problème 3. Résoudre l'équation suivante.

$$(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 512.$$

Problème 4. Montrer que tout polynôme p à coefficients entiers et $x \neq 0$, on a

$$|p(x)p\left(\frac{1}{x}\right)| \geq p(1)^2.$$

Problème 5. Existe-t-il un polynôme p à coefficients entiers tel que

1. $p(1) = 8$ et $p(4) = 15$?
2. $p(1) = 3$ et $p(k) = 2k$ où k est impair ?
3. $p(1) = 3$ et $p(k) = 2k$?

Problème 6. Est-ce qu'il est vrai que si p est un polynôme avec $\deg P \leq 3$

1. si 6 divise $p(n)$ pour tout entier n , alors p est à coefficients entiers ?
2. si 3 divise $p(n)$ pour tout entier n , alors p est à coefficients entiers ?

Problème 7 (*). Soit $n \geq 1$. Compter le nombre de polynômes P à coefficients valant 0, 1, 2 ou 3 tels que $P(2) = n$.

Problème 8 (*). Soit $n \geq 1$, le nombre $n! := 1 \times 2 \times \dots \times n$ est appelé n *factoriel*. On définit le n -ème *polynôme de Hermite* par $H_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$. Par définition, on a $H_0(x) = 1$.

1. Montrer que $H_n(x) = H_n(x-1) + H_{n-1}(x-1)$.
2. En déduire que pour tout entier k , $H_n(k)$ est un entier.
3. Montrer que tout polynôme à valeur entière est une somme de polynômes de Hermite ou de leurs opposés.

Problème 9 (*, Benelux 2010). Trouver tous les polynômes P tels que pour tous nombres réels a, b, c , on ait :

$$P(a+b-2c) + P(a-2b+c) + P(-2a+b+c) = 3P(a-b) + 3P(b-c) + 3P(c-a).$$

Problème 10 (*, Canada 1970). Soit P un polynôme à coefficients entiers et a, b, c, d des entiers distincts tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Montrer que $P(k)$ ne peut être égal à 8 si k est un entier.

Remarque : * signifie que l'exercice est difficile.
Envie de plus de problèmes ? il suffit de demander !