

# Le principe des tiroirs

Pigeonhole principle / Principe des tiroirs / Schubfachprinzip

Ce principe de théorie des ensembles est à la fois simple et très puissant. Dans ce théorème, on considère des objets (chaussettes, pigeons, ...) que l'on doit ranger dans des boîtes (tiroirs, nids, ...)

Le principe des tiroirs stipule la chose suivante : s'il y a plus d'objets que de boîtes, on va toujours pouvoir trouver au moins une boîte contenant au moins deux objets (en toute rigueur, on suppose qu'il y a au moins une boîte et qu'il n'y a qu'un nombre fini d'objets et de boîtes).

*Si tu lances sept dés alors au moins deux d'entre eux tomberont sur le même numéro.* Ici le principe des tiroirs peut s'appliquer car on a 7 objets (les dés) et 6 boîtes (le numéros sur les dés), et 7 est plus grand que 6. S'il y avait eu seulement 6 dés, le principe des tiroirs ne t'aurait été d'aucune utilité.

À titre d'exemple, utilisez ce principe pour répondre à la question suivante :

*Vous êtes dans le noir, étant donné un certain nombre de chaussettes de cinq couleurs différentes, combien de chaussettes (au minimum) devez-vous récupérer pour être certain d'en avoir deux de la même couleur ?*

En considérant les chaussettes comme nos objets et les couleurs comme nos boîtes, nous voyons bien que six chaussettes suffisent...

---

Suppose avoir six chaussettes, de couleur noir ou blanche. Par le principe des tiroirs, on a au moins deux chaussettes de la même couleur. Un peu mieux, on peut même dire que l'on en a trois de la même couleur. Même s'il n'y a que cinq chaussettes, on pourra toujours être sûr d'en avoir trois de la même couleur.

La **version quantitative du principe des tiroirs** stipule qu'il y a au moins une boîte avec  $N$  objets, où le nombre  $N$  s'obtient comme suit :

**divise le nombre d'objets moins 1 par le nombre de boîtes ;**

**si ce rapport n'est pas en entier, arrondis-le par défaut ;**

**ajoute 1.**

Par exemple, si tu as 31 chaussettes et 3 couleurs, tu obtiendras  $N = 11$  ; si tu as 30 chaussettes et 3 couleurs, tu obtiendras  $N = 10$ .

---

Voilà un certain nombre de règles à vérifier pour pouvoir appliquer le principe des tiroirs à un problème mathématique :

- Dans votre problème, vous devez repérer les objets et les boîtes. Parfois, le choix est clair, d'autre fois, il faut faire preuve d'un peu d'astuce.
- Vous devez avoir plus d'objets que de boîtes. Parfois, il vous faudra justifier que certaines boîtes sont nécessairement vides.
- Les boîtes peuvent venir de la géométrie : *Par exemple, considère sept personnes dans le monde : au moins quatre d'entre elles sont dans le même hémisphère.*
- Les boîtes (comme ensembles) ne sont pas forcément identiques, elles ne contiennent pas non plus forcément le même nombre d'éléments. *Par exemple, si tu prends trois nombres parmi 17, 27, 37, 14, 24 alors au moins deux d'entre eux ont le même chiffre des unités. Ce sont les ensembles  $\{17, 27, 37\}$  et  $\{14, 24\}$  qui joueront le rôle des boîtes.*
- Les boîtes doivent être construites en fonction du problème. *Par exemple, parmi trois chiffres dans 2, 3, 4, 6, on peut toujours en multiplier deux pour obtenir 12. En effet, tu peux choisir comme boîtes les ensembles  $\{2, 6\}$  et  $\{3, 4\}$ .*
- Pour certains problèmes, appliquer le théorème des tiroirs n'est qu'une partie et le reste du problème doit se traiter de manière différente.
- Il arrive parfois qu'un problème ait plus d'une solution et que l'utilisation du principe des tiroirs ne soit qu'une des possibilités. En mathématiques, tu peux toujours choisir ta stratégie préférée !

---

Il est grandement conseillé de s'inscrire sur le site suivant <http://www.mathraining.be> et de regarder dans la section

Théorie/Combinatoire/Principe des tiroirs

# Problèmes autour du principe des tiroirs

1. **Se serrer la main ou pas ?** Tu es à la fête de fin d'année de ton lycée. . . à la fin de cette fête tu as peut-être serré la main de tout le monde, de quelques personnes ou de personne. . .  
(on ne peut pas se serrer la main à soi-même et serrer la main de quelqu'un à plusieurs reprises ne compte pas).  
*Peut-on trouver deux personnes différentes dans la fête qui ont serré la main du même nombre de personnes ? Pourquoi ? Est-ce qu'il y a un autre fêtard qui a serré autant de mains que toi ?*
2. **Amis ou pas ?** Démontrer que dans un groupe de six personnes, on peut trouver trois personnes qui sont deux-à-deux amis l'une de l'autre ou qu'il y en a trois qui sont totalement étrangères l'une à l'autre (l'amitié est réciproque, deux personnes sont soit amis l'une de l'autre, soit étrangères l'une à l'autre).
3. **Être ou ne pas être un funambule ?** Être funambule, ça demande de l'entraînement et une sangle sur laquelle marcher en équilibre. Heureusement, vous pouvez pratiquer dans un jardin (ce jardin est un carré) dans lequel il y a cinq arbres et vous avez une sangle à votre disposition. Votre sangle fait quelques mètres de plus que la moitié de la diagonale du jardin.  
*Est-il possible de tendre votre sangle entre deux de ces arbres pour vous entraîner ?*
4. **Des dominos sur un échiquier ?** Que peut-on faire quand on a perdu ses pièces d'échec et que l'échiquier a perdu deux cases diagonalement opposées ? On peut jouer aux dominos, bien sûr !  
*Essayez de recouvrir l'échiquier en question avec des dominos (un domino recouvre deux cases exactement). . . Est-ce même possible ?*
5. **Jouons au jeu des neuf nains !** Le jeu des neufs nains se joue avec huit cartes : la première représente un nain, la deuxième deux nains. . . et la dernière huit nains. Vous avez gagné le jeu lorsque vous tenez en main au moins deux cartes dont la somme des nains est égale à neuf. *Montrer que si vous avez cinq cartes en main, vous avez nécessairement une main gagnante.*

L'ordre de ces problèmes ne reflète pas leur difficulté ! Les problèmes 5 et 3 sont probablement les plus simple (si on a la bonne idée). Tu peux résoudre le problème 4 sans le principe des tiroirs (mais tu peux te demander quand même comment ce principe s'applique).

TOUT EXERCICE RÉSOLU EST UN **GRAND SUCCÈS !**

Ne vous découragez pas si vous ne trouvez pas de suite la solution... Ces exercices sont conçus pour vous faire réfléchir, il faut donc prendre son temps. De toute façon, vous pouvez toujours nous demander des conseils !