

# Les bases des probabilités

Commençons avec un exemple.

**Exemple.** Quand on lance deux dés, quelle est la probabilité que leur somme fasse 6 ?

**Solution.** En faisant la liste de tous les cas possibles (des différents résultats des dés), on trouve  $6 \times 6 = 36$  possibilités. Par symétrie, chacun de ces cas a la même probabilité  $\frac{1}{36}$  d'arriver. Il n'y a que 5 cas pour lesquels la somme est 6 :

$$(1, 5) \quad (2, 4) \quad (3, 3) \quad (4, 2) \quad (5, 1)$$

Ainsi la réponse est  $5/36$ .

*Ce que l'on retire de cet exemple :*

- L'ensemble de tous les cas possibles  $\rightarrow$  **l'Univers**, noté  $\Omega$ . Dans cet exemple, on a :

$$\Omega = \{ (1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (3, 1), \dots, (6, 6) \}.$$

- Les collections de cas appelés  $\rightarrow$  **Évènements** et souvent notés en majuscule. Dans cet exemple on a :

$$A = \{ (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) \} = \{ \text{la somme des dés fait 6} \}.$$

Par définition, les évènements sont des sous-ensembles de l'univers. La collection de tous les sous-ensembles de  $\Omega$  est notée  $2^\Omega$  et est appelée **l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $\Omega$** . Voir problème (1).

- À partir de cet exemple, on « voit » que la « probabilité » est un réel entre  $[0, 1]$  associé à un évènement que l'on écrit de manière informelle :

$$\mathbb{P} : 2^\Omega \rightarrow [0, 1], \quad \text{et par exemple} \quad \mathbb{P}(A) = 5/36.$$

**Problème (1)** Montrer que si  $A$  est un ensemble à  $m$  éléments, l'ensemble  $2^A$  de tous les sous-ensembles de  $A$  a  $2^m$  éléments. (Ceci explique la notation  $2^A$ ).

On fixe maintenant les définitions rigoureuses. On supposera toujours l'univers  $\Omega$  fini, ce qui a le mérite d'éviter l'introduction de trop détails techniques.

**Définition 1.** On fixe un entier  $m \geq 1$  et notons l'univers  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ . Une fonction  $\mathbb{P} : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  est une probabilité sur  $\Omega$  si elle satisfait les axiomes suivants :

1.  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .

*Quelques explications :* la notation  $\emptyset$  signifie l'ensemble vide (l'ensemble qui ne contient aucun élément). En probabilité,  $\emptyset$  est un évènement qui n'arrive jamais. Sa probabilité est donc nulle. Cela est complètement naturel, n'est-ce pas ?

2. Étant donné les ensembles  $A \subset B \subset \Omega$ , on a  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$ .

*Quelques explications* : nous avons déjà mentionné dans les exemples ci-dessus que l'évènement est un sous-ensemble de notre univers. En clair,  $\omega_1$  est un élément de  $\Omega$  mais  $\{\omega_1\}$  est un sous-ensemble de  $\Omega$ , donc  $\{\omega_1\}$  est un élément de  $2^\Omega$ . (Attention aux accolades  $\{ \}$  !)

$A \subset B$  signifie

(i)  $A = \emptyset$  (autrement dit  $A$  est vide.)

ou

(ii)  $A \neq \emptyset$ , et tout élément de  $A$  est un élément de  $B$ . En probabilité,  $A \subset B$  signifie que si  $A$  arrive, alors  $B$  doit arriver également. Il est donc raisonnable d'avoir  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .

3.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

*Quelques explications* : en probabilité, l'évènement  $\Omega$  peut être vu comme **l'évènement certain** qui arrive avec probabilité 1.

4.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  quelque soient les évènements  $A, B$  tels que  $A \cap B = \emptyset$ .

*Quelques explications* :  $A \cap B$  est l'intersection des deux ensembles  $A, B$ , c'est à dire, l'ensemble des éléments communs à  $A$  et  $B$ . De manière similaire,  $A \cup B$  est la réunion des deux ensembles  $A, B$ , c'est à dire, l'ensemble de tous les éléments de  $A$  **et** de tous les éléments de  $B$  (et rien d'autre). En probabilité,  $A \cap B$  signifie que les deux évènements arrivent et  $A \cup B$  signifie que l'évènement  $A$  ou <sup>1</sup> l'évènement  $B$  arrive. Dans le cas où  $A \cap B = \emptyset$  (c'est à dire que l'on a des évènements disjoints), la probabilité que  $A$  arrive ou  $B$  arrive est exactement la somme de la probabilité que  $A$  arrive avec la probabilité que  $B$  arrive.

**Exemple** : Probabilité uniforme sur  $\Omega$  fini. La probabilité  $\mathbb{P}_u$  uniforme est définie par  $\mathbb{P}_u(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ . Ici,  $\#A$  désigne le nombre d'éléments dans  $A$ . Quand l'on considère un univers fini, il est souvent sous-entendu que la probabilité est la probabilité uniforme. C'était le cas dans l'exemple ci-dessus, les dés étaient supposés équilibrés. Le calcul effectué pour calculer la probabilité de l'évènement « la somme des dés fait 6 » était implicitement pour la probabilité uniforme.

**Problème (2)** Soit  $\Omega, \mathbb{P}$  défini comme dans la **Définition 1** et  $F \subset \Omega$  tel que  $\mathbb{P}(F) > 0$ .

On définit  $Q : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  via

$$Q(A) = \frac{\mathbb{P}(F \cap A)}{\mathbb{P}(F)}$$

pour tout  $A \subset \Omega$ . Montrer que  $Q$  est également une probabilité sur  $\Omega$ .

*Indication* : Il vous faudra utiliser les lois de De Morgan, pour  $A, B \subset \Omega$ , on a  $F \cap (A \cup B) = (F \cap A) \cup (F \cap B)$ .

---

1. Le « ou » est inclusif, autrement dit  $A$  et  $B$  peuvent arriver dans cette situation

**Problème (3)** Savoir manipuler les opérations sur les ensembles est essentiel pour la théorie des probabilités. Ici, on vous demande de démontrer les lois de De Morgan, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois ensembles alors :

$$\bullet C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad \bullet C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B).$$

*Pour montrer que deux ensembles sont égaux, il suffit de montrer que tout élément de l'un se retrouve dans l'autre*

La probabilité  $Q$  construite dans le problème 2 s'appelle « la probabilité conditionnelle sachant  $F$  » et on écrit  $Q(A) = \mathbb{P}(A|F)$ . En première approche,  $\mathbb{P}(A|F)$  n'est pas, *en général*, la probabilité que  $A$  arrive, mais est la probabilité que  $A$  arrive sachant que  $F$  arrive. Par exemple si  $F \subset A$ , alors  $\mathbb{P}(A|F) = 1$ , ce qui signifie que si  $F$  arrive alors  $A$  arrive<sup>2</sup>.

Que se passe-t-il si  $\mathbb{P}(A|F) = \mathbb{P}(A)$  ? Que nous dit cette égalité ?

La notion de probabilité conditionnelle est liée à une autre notion centrale en théorie des probabilités :

**Définition 2.** Étant donné  $\Omega, \mathbb{P}$  comme dans la **définition 1**, on dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants au vue de la probabilité  $\mathbb{P}$  si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(i)  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(B) = 0$ ,

(ii)  $A$  et  $B$  vérifient  $\mathbb{P}(A) > 0$ ,  $\mathbb{P}(B) > 0$ ,  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$  et  $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ .

**Quelques explications sur les points (i) et (ii) :** (i) Quand l'évènement  $A$  a une probabilité nulle d'arriver, il n'arrivera jamais, il est donc raisonnable de dire « *que l'évènement  $A$  arrive ou non, cela n'affecte pas le fait que  $B$  arrive* » ; c'est à dire, que  $A$  est indépendant de  $B$ .

(ii) Supposons maintenant que  $\mathbb{P}(A) > 0$  et  $\mathbb{P}(B) > 0$ , alors les probabilités conditionnelles  $\mathbb{P}(\cdot|A)$  et  $\mathbb{P}(\cdot|B)$  sont bien définies. Supposons que  $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$  : cela signifie que la probabilité que  $B$  arrive sachant  $A$  est exactement la probabilité que  $B$  arrive (tout court). Autrement dit,  $A$  n'influence pas  $B$ , d'où  $A$  est indépendant de  $B$  est une terminologie qui fait sens de ce point de vue.

**Problème (4)** (a) Étant donné  $\Omega, \mathbb{P}$  comme dans la **définition 2**, montrer que  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

*On utilise parfois cette dernière égalité pour définir l'indépendance.*

**Problème (4)** (b) Étant donné  $\Omega, \mathbb{P}$  comme dans la **définition 2** et deux événements  $A$  et  $B$  avec une probabilité strictement positive. Montrer que  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$  si et seulement si  $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ .

*Ceci montre que l'indépendance est symétrique.*

**Problème (5)** Une urne contient 11 boules, parmi lesquelles six sont blanches et cinq sont noires. On tire trois boules, quelle est la probabilité que, parmi ces trois boules, une soit blanche et les deux autres noires ? On commencera par décrire soigneusement l'univers  $\Omega$ .

---

2. Par exemple :  $F$  est l'évènement « manger une pomme » et  $A$  l'évènement « manger un fruit ». Si  $F$  arrive, alors on est sûr que  $A$  arrive.

## Solutions

(1) Si  $m = 0$ , alors l'ensemble vide est le seul élément de  $2^\emptyset$  et le problème est résolu. Si  $m \geq 1$ , on fait la liste des éléments de  $A : x_1, \dots, x_m$ . Pour construire un sous-ensemble  $S$  de  $A$ , on choisit si  $x_1$  est dans  $S$  ou non, si  $x_2$  est dans  $S$  ou non, ..., si  $x_m$  est dans  $S$  ou non. Pour chaque élément, il y a deux choix, de sorte que pour  $S$  il y a  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^m$  choix différents possibles. Autrement dit  $2^A$  contient  $2^m$  éléments. Voir aussi la solution du problème 2 dans la feuille sur la théorie des ensembles (Thème 1, Janvier 2018).

(2) Il faut vérifier quatre conditions :  $Q(\emptyset) = \frac{\mathbb{P}(F \cap \emptyset)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(F)} = 0$ . Pour  $A \subset B \subset \Omega$ , on a  $F \cap A \subset F \cap B \subset F$  (pourquoi ?), donc  $Q(A) \leq Q(B) \leq 1$ .  $Q(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(F \cap \Omega)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = 1$ . Supposons maintenant que  $A$  et  $B$  soient des événements disjoints, alors  $F \cap A$  et  $F \cap B$  sont également disjoints (pourquoi ?). Ensuite, par les lois de De Morgan

$$Q(A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(F \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}((F \cap A) \cup (F \cap B))}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F \cap A)}{\mathbb{P}(F)} + \frac{\mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(F)}$$

ce qui vaut  $Q(A) + Q(B)$ . Ceci conclut notre preuve.

(3) Pour les lois de De Morgan, voir la solution du problème 1 dans la feuille sur la théorie des ensembles (Thème 1, Janvier 2018).

(4) Quand  $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$  sont tous les deux strictement positifs, l'égalité est une conséquence directe de la définition ; si l'une de ces probabilités est nulle, disons  $\mathbb{P}(A) = 0$ , alors  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0$  et puisque  $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$ , il s'ensuit que  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ . Cela termine la preuve du point (a). Le point (b) provient des équivalences suivantes :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

(5) On modélise l'univers  $\Omega$  comme un ensemble de tirages *ordonnés* de trois boules, ou triplets de boules : plus précisément, on numérote les cinq boules noires  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  et les six boules blanches  $b_1, \dots, b_6$ . Il y a alors  $11 \times 10 \times 9 = 990$  tirages possibles<sup>3</sup>. On compte maintenant les différentes configurations aboutissant aux tirages voulus.

— Première boule blanche et deux autres noires  $6 \times 5 \times 4 = 120$

— Première boule noire, deuxième boule blanche et troisième boule noire  $5 \times 6 \times 4 = 120$

— Deux premières boules noires et la troisième blanche  $5 \times 4 \times 6 = 120$

Au final, la probabilité vaut

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}.$$

---

3. Quand on parle de triplet, on sous-entend que le tirage  $(n_1, n_2, b_1)$  est différent du tirage  $(n_2, n_1, b_1)$ .