

Le raisonnement par récurrence

Principle of mathematical induction

Raisonnement par récurrence

Vollständige Induktion oder Induktionsprinzip

Le raisonnement par récurrence s'apparente à l'effet domino en mathématiques! L'effet domino, c'est une réaction en chaîne qui décrit la chute de dominos placés en ligne. Si l'on imagine ces dominos placés debout et assez proches les uns des autres, la chute du premier va provoquer la chute du deuxième puis du troisième et ainsi de suite. Au final, tous les dominos sont tombés. On pourra regarder des vidéos spectaculaires où l'on fait tomber des dominos en chaîne. En mathématiques, la récurrence est une façon de démontrer des choses.

- Chaque domino est un cas de la démonstration. Dire qu'un domino est tombé, c'est dire qu'un cas est démontré et dire que tous les dominos sont tombés, c'est dire que la démonstration est terminée. Il peut y avoir une infinité de dominos en mathématiques.
- **Le cas initial** : On doit faire tomber le premier domino, c'est à dire que *l'on doit démontrer le cas initial*.
- **L'hérédité** : Quand un domino tombe, il fait tomber le suivant, c'est à dire que *l'on doit partir d'un cas pour en déduire le prochain*.

Quelques principes généraux à respecter si l'on veut effectuer une démonstration par récurrence pour résoudre un problème:

- *Vous devez précisément identifier les cas de la récurrence* (il peut y en avoir une infinité). Par exemple, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$. Le cas de la démonstration est, pour n fixé : $n^2 \leq 2^n$.
- *Il vous faut un cas initial*. En général, quand il y a des entiers naturels, c'est le plus petit apparaissant dans l'énoncé. Dans l'exemple ci-dessus, le cas initial pourrait être $n = 4$.
- *Il vous faut démontrer l'hérédité*. En supposant que le cas n soit vrai, montrer que le cas $n+1$ est vrai. La supposition que n est vrai est parfois appelée *hypothèse de récurrence*. À chaque fois que vous faites une récurrence assurez-vous d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour démontrer le cas $n + 1$. Si vous ne l'utilisez pas, il y a de grandes chances que votre raisonnement soit fallacieux!

Exemple: Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.

Cas initial : Pour $n = 4$, l'inégalité $4^2 \leq 2^4$ est juste (car $4^2 = 16 = 2^4$).

Hérédité (de n à $n + 1$, où $n \geq 4$): Soit $n \geq 4$ fixé tel que $n^2 \leq 2^n$. Il nous faut montrer que le cas $n + 1$ est vrai également, i.e. que $(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$. Or

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 = n^2 + n \cdot n \geq n^2 + 4n = n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 2 \cdot 4 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Remarquons que l'on a utilisé l'hypothèse de récurrence quand l'on a écrit $2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2$.

La somme des entiers: Montrons par récurrence que la somme des entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Dans la formulation, on suppose implicitement que n est un nombre entier ≥ 1 . Le cas de base est donc $n = 1$. D'une part, la somme des nombres de 1 à 1 est 1, et d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc le cas $n = 1$ est vérifié.

On considère maintenant l'hérédité $n \rightsquigarrow n + 1$ pour $n \geq 1$. Supposons que pour un n fixé, la somme des entiers de 1 à n soit égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Pour calculer la somme des entiers de 1 à $n + 1$, il suffit de rajouter $n + 1$ à la somme des entiers de 1 à n , c'est à dire à $\frac{n(n+1)}{2}$ par hypothèse de récurrence. Donc la somme des entiers de 1 à $n + 1$ vaut

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

C'est donc la propriété pour le cas $n + 1$.

On peut calculer cette somme de plusieurs manières différentes. Par exemple, le double de cette somme peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 & \\ \hline n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 & \end{array}$$

Il y a n colonnes et la somme sur chaque colonne vaut $n + 1$, d'où le double de la somme est égal à $n(n + 1)$.

Ce que l'on vient de faire est la version classique du raisonnement par récurrence. On verra le mois prochain comment l'on peut raffiner ces raisonnements. Restez à l'écoute!

Une question sur le principe de récurrence?
N'hésitez pas à nous la poser.

Problèmes autour du raisonnement par récurrence

1. **La somme des carrés** Montrer que la somme des entiers au carré entre 1 et n vaut

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(au fait, pourquoi cette fraction est-elle toujours un entier?).

2. **La somme des nombres impairs:** Deviner la formule pour la somme des n premiers nombres impairs, puis la démontrer par récurrence.
3. **L'inégalité de Bernoulli:** Montrer que pour tout nombre réel $x \geq -1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.
4. **Qu'est-ce qui cloche dans la récurrence?** Toutes les roses ont la même couleur. Montrons par récurrence que tout ensemble de n roses est constitué de roses de couleur identique. Considérons $n \geq 1$ roses.

- Cas initial : Si $n = 1$ alors cette rose n'a qu'une seule couleur.
- Hérédité : Si tout paquet de n roses est constitué de roses d'une même couleur, montrons que c'est le cas pour $n+1$ également.
Prenons $n+1$ roses : les n premières roses ont toutes la même couleur par hypothèse de récurrence, les n dernières roses ont toutes la même couleur par hypothèse de récurrence. Ces deux couleurs doivent donc être les mêmes et donc les $n+1$ roses ont toutes la même couleur (on pourra par exemple visualiser le raisonnement pour $n = 4$).