U.P.S., L3 MATHS FONDA ALGÈBRE, CORRIGÉ ABRÉGÉ DU PARTIEL DU 30/10/2008

1.1 (1 pt) Pour tout $g \in G$, l'application $Ad_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ vérifie $\forall h, k \in G, Ad_g(hk) = ghkg^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1} = Ad_g(h)Ad_g(k)$ donc est un morphisme. De plus cet (endo)morphisme est bijectif (de bijection réciproque $Ad_{g^{-1}}$). C'est donc un automorphisme de G.

1.2 (2,5 pts) Notons $Int(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G. $Int(G)$ est l'image de l'application $Ad : G \to Aut(G), g \mapsto Ad_g$, qui est un morphisme de groupes (car $Ad_{gg'} = Ad_g \circ Ad_{g'}$). Donc $Int(G)$ est un sous-groupe de $Aut(G)$ isomorphe à $G/\mathrm{Ker}(Ad)$. Or $\mathrm{Ker}(Ad) = \{g \in G \mid \forall h \in G, ghg^{-1} = h\} = Z(G)$.

2.1 (3 pts) Pour toute partie S de G, $f(< S >) =< f(S) >$. En particulier, $f(D(G))$ est le sous-groupe engendré par les $f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1}$ (pour $a, b \in G$), qui appartiennent tous au sous-groupe $D(G)$. Donc $f(D(G)) \subset D(G)$. En particulier, $D(G)$ est stable par tout automorphisme intérieur de G, donc est distingué dans G.

2.2 (1 pt) est un cas particulier du “ si” de 2.3.

2.3 (2 pts) G/N abélien $\Leftrightarrow \forall a, b \in G, aNbN(aN)^{-1}(bN)^{-1} = N \Leftrightarrow \forall a, b \in G, aba^{-1}b^{-1}N = N \Leftrightarrow \forall a, b \in G, aba^{-1}b^{-1} \in N \Leftrightarrow D(G) \subset N$.

2.4 (2,5 pts) $G/\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$, qui est un sous-groupe d'un groupe abélien. Donc $G/\mathrm{Ker}(f)$ est abélien, donc (d'après 2.3) $D(G) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Par surjectivité de $p : G \to G/D(G)$, il existe au plus une application $\overline{f} : G/D(G) \to A$ telle que $\overline{f} \circ p = f$. Il en existe une car cette équation $\overline{f} \circ p = f$ définit $\overline{f}$ de façon non ambigüe : si $p(x) = p(y)$ alors $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(p) = D(G) \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(xy^{-1}) = e$, d'où $f(x) = f(y)$. De plus cet unique $\overline{f}$ est un morphisme : pour tous $u, v \in G/D(G)$, soient $x, y \in G$ tels que $u = p(x)$ et $v = p(y)$, on a $\overline{f}(u)\overline{f}(v) = f(x)f(y) = f(xy) = \overline{f}(p(xy)) = \overline{f}(p(x)p(y)) = \overline{f}(uv)$.

3.1 (1 pt) Pour tout $x \in \mathbf{Q}$, $(x + \mathbf{Z}) \cap (\mathbf{Q} \cap [0, 1[) = (x + \mathbf{Z}) \cap [0, 1[= \{x - E(x)\}$, par définition de la partie entière $E(x)$ de x.

3.2 (1 pt) Soit $x = a/b$ avec $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}^*$. Alors $bx \in \mathbf{Z}$ donc $b(x + \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

3.3 (1 pt) D'après 3.1, $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est en bijection avec $\mathbf{Q} \cap [0, 1[$ qui est infini.

4.1 (1 pt) est un cas particulier de 4.2.

4.2 (1 pt) Les deux seules suites $(m_1, \dots, m_r)$ d'entiers > 1 telles que $p^2 = m_1 \dots m_r$ et $\forall i < r, m_{i+1}|m_i$ sont (p, p) et (p^2). D'après le théorème des diviseurs élémentaires, les deux seuls groupes abéliens d'ordre p^2 sont donc (à isomorphisme près) $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.

4.3 (1 pt) La seule suite $(m_1, \dots, m_r)$ d'entiers > 1 telle que $15 = m_1 \dots m_r$ et $\forall i < r, m_{i+1}|m_i$ est (15). D'après le théorème des diviseurs élémentaires, tout groupe abélien d'ordre 15 est isomorphe à $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$. (Variante : tout groupe abélien d'ordre 15 est produit direct de son 3-Sylow et de son 5-Sylow, qui sont cycliques car d'ordres premiers, donc est isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$).

5.1 (1 pt) Si $n_p = 1$ alors tout conjugué de H (qui est évidemment un p-Sylow) est égal à H, donc H est distingué. Réciproquement, si H est distingué alors tout p-Sylow, étant (d'après le deuxième théorème de Sylow) un conjugué de H, est égal à H, donc $n_p = 1$.

5.2 (1 pt) Si G est un groupe d'ordre 40, n_5 divise 8 et est congru à 1 modulo 5, donc $n_5 = 1$, donc G admet un unique 5-Sylow. D'après 5.1, ce 5-Sylow est distingué dans G (et non trivial) donc G n'est pas simple.