Exercice 1. Soit $(X, \star)$ un ensemble muni d'une loi interne.

a) Montrer que si e est neutre à droite et e' est neutre à gauche alors $e = e'$. En déduire que s'il existe un élément neutre (des deux côtés) alors il n'en existe qu'un.

b) On suppose que $\star$ est associative et qu'il existe un élément neutre. Soit $x \in X$. Montrer que si x admet un symétrique à droite y et un symétrique à gauche z alors $y = z$. En déduire que si x admet un symétrique (des deux côtés) alors il n'en admet qu'un.

Exercice 2. Pourquoi tout morphisme d'espaces vectoriels (i.e. toute application linéaire) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ est-il un morphisme de groupes ? La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Pour tout groupe G, définir une bijection entre $Hom(\mathbf{Z}, G)$ et G.

Exercice 4. Soit S une partie d'un groupe G, on note $< S >$ l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S.

a) Démontrer que $< S >$ est un sous-groupe de G contenant S, et que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion). $< S >$ est appelé le sous-groupe de G engendré par S.

b) Soit H l'ensemble des éléments de G qui sont des produits (d'un nombre fini) d'éléments de $S \cup S^{-1}$ (avec S^{-1} = l'ensemble des inverses des éléments de S et, par convention, le "produit d'aucun élément" est le neutre). Démontrer (directement, ou en utilisant a)) que $H =< S >$.

c) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Démontrer que $< f(S) >= f(< S >)$.

Exercice 5. Soit S une partie d'un groupe G et K l'intersection de tous les sous-groupes distingués de G contenant S.

a) Démontrer que K est un sous-groupe distingué de G contenant S, et que c'est le plus petit. K est appelé le sous-groupe distingué de G engendré par S.

b) Soit T l'ensemble de tous les conjugués d'éléments de S. Démontrer que $K =< T >$.

Exercice 6. Montrer que tout groupe abélien engendré par n éléments est (isomorphe à) un quotient de $\mathbf{Z}^n$, et que ceci caractérise le groupe $\mathbf{Z}^n$ (à isomorphisme près) parmi les groupes abéliens à n générateurs.

Exercice 7. Soit $\mathbf{F}_2$ l'ensemble des expressions de la forme $a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_4}\dots x^{n_k}$ (avec $x = b$ si k pair et $x = a$ si k impair) ou de la forme $b^{n_1}a^{n_2}b^{n_3}a^{n_4}\dots x^{n_k}$ (avec $x = a$ si k pair et $x = b$ si k impair) avec $k \in \mathbf{N}$ et (si $k \neq 0$) $n_1, \dots, n_k$ entiers relatifs non nuls. On munit $\mathbf{F}_2$ de la loi de groupe naturelle (par concaténation de deux expressions, puis simplifications éventuelles).

a) Quel est le neutre ? quel est le symétrique d'une expression ?

b) Montrer que tout groupe engendré par deux éléments est (isomorphe à) un quotient de $\mathbf{F}_2$, et que ceci caractérise le groupe $\mathbf{F}_2$ (à isomorphisme près) parmi les groupes à deux générateurs.

c) $\mathbf{F}_2$ est appelé le groupe libre à deux générateurs a et b, et on peut construire de même pour tout $n \in \mathbf{N}$ le groupe libre $\mathbf{F}_n$ à n générateurs, dont tout groupe engendré par n éléments est quotient. Identifier F_0 et F_1.

Exercice 8. Soit G le groupe de présentation $< r, s; r^n, s^2, (sr)^2 >$, c'est-à-dire le quotient du groupe libre $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs a et b par le sous-groupe distingué engendré par $a^n, b^2, (ab)^2$ (on note r, s les images de a, b dans ce quotient G).

a) Vérifier que G est engendré par r et s et que $r^n = s^2 = (sr)^2 = e$ (le neutre de G).

b) Montrer que tout groupe engendré par deux éléments vérifiant ces relations est (isomorphe à) un quotient de G.

c) Combien G a-t-il d'éléments ? Démontrer que G est isomorphe au groupe diédral D_n (cf feuille 1 exercice 8).

d) Montrer que le groupe de présentation $< x, y; x^2, y^2, (xy)^n >$ est isomorphe à G.

Exercice 9. Soient G un groupe et $(Aut(G), \circ)$ le groupe de ses automorphismes. Pour tout $u \in G$ on note Ad_u l'application de G dans G définie par $Ad_u(g) = ugu^{-1}$.

a) Vérifier que $u \mapsto Ad_u$ est un morphisme de G dans $Aut(G)$.

b) En déduire que le sous-ensemble $Int(G)$ de $Aut(G)$ constitué des automorphismes intérieurs (c'est-à-dire de tous les automorphismes de la forme Ad_u avec $u \in G$) est un sous-groupe.

c) Prouver que ce sous-groupe est distingué.

d) Démontrer que ce groupe $Int(G)$ est isomorphe à un quotient de G par un sous-groupe distingué $Z(G)$ (que l'on précisera).

e) Prouver que $Z(G)$ est non seulement distingué dans G (i.e. stable par tout automorphisme intérieur) mais caractéristique (i.e. stable par tout automorphisme).

Exercice 10. Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe G. On note HK l'image de l'application $H \times K \to G, (h, k) \mapsto hk$. Montrer que

a) HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$;

b) si K est stable par conjugaison par tout élément de H alors $HK = KH$, mais la réciproque est fausse ;

c) si $\forall h \in H, \forall k \in K, hk = kh$ alors K est stable par conjugaison par tout élément de H, mais la réciproque est fausse ;

d) si $\forall h \in H, \forall k \in K, hk = kh$ alors le sous-groupe HK est isomorphe au quotient du groupe produit $H \times K$ par un certain sous-groupe distingué (à déterminer) ;

e) si K est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G, K est distingué dans HK, $K \cap H$ est distingué dans H, et les deux groupes quotients associés sont isomorphes.

Exercice 11. Dans un groupe G, soient x d'ordre m et y d'ordre n.

a) Si $xy = yx$, montrer que l'ordre de xy divise $\mathrm{ppcm}(m, n)$. Peut-on remplacer "divise" par "=" ?

b) Déduire de (a) que les éléments d'ordre fini d'un groupe commutatif G forment un sous-groupe de G.

c) Si $xy = yx$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, montrer que l'ordre de xy vaut mn.

d) Pouvait-on se passer de l'hypothèse $xy = yx$ dans (a), et de l'hypothèse G commutatif dans (b) ? (regarder $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$).

Exercice 12. Montrer qu'il existe $a, b \in (\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}), +)$ tels que a, b soient d'ordre infini et $a + b$ d'ordre fini > 1.