Exercice 1. Utiliser l'équation des classes afin de déterminer l'ordre du groupe G^+ des isométries directes du cube. Même question pour le groupe G des isométries du cube. Mêmes questions pour le tétraèdre régulier.

Exercice 2. Démontrer (en utilisant éventuellement l'exercice 8 de la feuille 3) :

a) dans A_n, les produits de deux transpositions de supports disjoints sont conjugués (pour $n \geq 4$),

b) dans A_5 et A_6, les 5-cycles se répartissent en deux classes de conjugaison,

c) dans A_n, les produits de deux 3-cycles de supports disjoints sont conjugués (pour $n \geq 6$).

Exercice 3. Dans le théorème de simplicité de A_n du cours, reprendre la preuve du cas 2 en vérifiant que $(253)(12345)^{-1}$ est un 5-cycle conjugué dans A_5 à (12345).

Exercice 4.

a) Si $n \geq 5$, démontrer que le seul sous-groupe distingué et propre de S_n est A_n.

b) En déduire que si $n \geq 5$, S_n est non résoluble (i.e. : il n'existe pas de suite décroissante de sous-groupes $S_n = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}$ telle que chacun soit distingué dans le précédent avec quotient abélien).

c) Soient $P(X) = X^5 - 3X - 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ ses racines dans $\mathbf{C}$, $k = \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$, G le groupe des automorphismes du corps k. On pourra admettre (ou démontrer) que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$ (si bien que G agit transitivement sur $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_5\}$) et que P possède exactement 3 racines réelles (si bien que la conjugaison, qui appartient à G, agit sur les 5 racines comme une transposition). En déduire que G est isomorphe à S_5, donc non résoluble (le théorème d'Abel dit qu'alors, l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$ n'est pas “résoluble par radicaux”).

Exercice 5.

a) Montrer que le produit direct est un cas particulier de produit semi-direct.

b) Montrer qu'un produit semi-direct n'est jamais commutatif, sauf lorsque c'est un produit direct de deux groupes commutatifs.

Exercice 6. Démontrer que S_n est un produit semi-direct de A_n par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 7. Soit G un groupe d'ordre pq avec p et q premiers, $p < q$.

a) Montrer que G a un seul sous-groupe d'ordre q. En déduire que G est un produit semi-direct.

b) Montrer que si q n'est pas congru à 1 modulo p alors G est abélien, et même cyclique.

c) Montrer que si $p = 2$, G est cyclique ou diédral.

Exercice 8. Soit G un groupe d'ordre $p^r q^s$ avec p, q premiers distincts et $r, s \in \{1, 2\}$ t.q. $p \not| q^s - 1$ et $q \not| p^r - 1$. Montrer que G est abélien. (exemple : $|G| = 45$)

Exercice 9. Soit G d'ordre mp^n avec p premier $> m$. Montrer que G n'est pas simple. (exemples : $|G| = 20, 28$). Généraliser ce résultat au cas $|G| = mp^n$ (avec p premier ne divisant pas m) sous l'hypothèse : “le seul diviseur d de m pour lequel $p|d - 1$ est $d = 1$”. (exemple : $|G| = 200$)

Exercice 10. Soit G d'ordre $2^r p$ avec p premier impair $\geq 2^r - 1$. Montrer que G n'est pas simple (exemples : $|G| = 12, 56$). (Remarque : lorsque $p \geq$ (donc $>$) 2^r, on retrouve un cas particulier de “G d'ordre mp^n avec p premier $> m$”, mais pour $p = 2^r - 1$ c'est un nouveau résultat).

Exercice 11.

a) Exprimer les groupes suivants comme produits directs de p-groupes cycliques : $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ et $Z/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$.

b) $Z/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ est un groupe d'ordre $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Quel est l'ordre des composantes cycliques primaires que vous trouvez ?

c) Comparer la décomposition de $Z/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ en p-groupes et en p-groupes cycliques.

Exercice 12. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes commutatifs d'ordre ≤ 17.

Exercice 13. Soient $G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et f un morphisme de G dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Démontrer que la composante de f sur $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est nulle. A quelle condition f se factorise-t-il par un morphisme de G dans $\mathbf{Z}$?