Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbf{N}^\star$, et $d = pgcd(a, b)$. Montrer que $pgcd(X^a - 1, X^b - 1) = X^d - 1$ dans $A[X]$ quel que soit l'anneau A.

Exercice 2. Donner un exemple de morphisme d'anneaux $f : A \to B$ et d'idéal I de A, t.q. $f(I)$ ne soit pas un idéal de B.

Exercice 3. Quel est le noyau du morphisme $\mathbf{Z}[X] \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, P(X) \mapsto \overline{P(0)}$?

Exercice 4. Soient I, J deux idéaux d'un anneau A. Montrer que $J/(I \cap J) \simeq (I + J)/I$.

Exercice 5. Soient $f : A \to B$ morphisme surjectif, J idéal de B, I idéal de A, $N = \mathrm{Ker} f$. Montrer que $f(f^{-1}(J)) = J$ et $f^{-1}(f(I)) = I + N$ (en déduire que $B/f(I) \simeq A/(I + N)$). Condition (nécessaire et suffisante) pour que $f^{-1}(f(I)) = I$? En déduire une bijection (compatible avec l'inclusion) entre l'ensemble des idéaux de B et l'ensemble des idéaux de A qui contiennent N.

Exercice 6.

a) Soient $I \subset K$ deux idéaux de A, et K' l'image canonique de K dans A/I. Montrer que $(A/I)/K' \simeq A/K$.

b) Soient I, J idéaux de A, J' l'image canonique de J dans A/I, I' l'image canonique de I dans A/J. Déduire de (a) que $(A/I)/J' \simeq A/(I + J)$. En déduire que $(A/I)/J' \simeq (A/J)/I'$.

c) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ entier algébrique, de polynôme minimal P. Montrer que $\mathbf{Z}[\alpha] \simeq \frac{\mathbf{Z}[X]}{<P>}$. (Exemple : $\mathbf{Z}[i] \simeq \mathbf{Z}[X]/ < X^2 + 1 >$). En particulier si $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}[X]/ < X - \alpha > \simeq \mathbf{Z}[\alpha] = \mathbf{Z}$. (Exemple : $\mathbf{Z}[X]/ < X - 3 > \simeq \mathbf{Z}$).

d) Déduire de tout ce qui précède que $\mathbf{Z}[i]/ < 1 + 3i >= \mathbf{Z}[i]/ < i - 3 > \simeq \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

Exercice 7. Soient A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.

a) Soit $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Montrer que $I + J$ est un idéal de A.

b) Soit IJ l'ensemble des éléments qui s'écrivent sous la forme d'une somme finie $\sum_i a_i b_i$ avec $a_i \in I$ et $b_i \in J$. Montrer que IJ est un idéal de A, inclus dans $I \cap J$.

c) Montrer que $I + J = A \Leftrightarrow \exists a \in I, \exists b \in J, a + b = 1$.

d) Montrer que $I + J = A \Rightarrow IJ = I \cap J$.

e) Soient $p : A \to A/I$, $q : A \to A/J$ les surjections canoniques, montrer que $\varphi : A \to A/I \times A/J, a \mapsto (p(a), q(a))$ est un morphisme d'anneaux. Calculer son noyau et son image si $I + J = A$. Qu'en déduit-on ?

f) Application à $A = \mathbf{Z}, I = a\mathbf{Z}, J = b\mathbf{Z}$ où a, b sont deux entiers premiers entre eux : montrer que $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/ab\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$.

Exercice 8. Soit I un idéal propre d'un anneau commutatif A. Montrer que I est maximal ssi $\forall x \in A \setminus I, \exists y \in A, 1 - xy \in I$.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif, on note $A^\times$ le groupe de ses inversibles. A est dit local s'il n'a qu'un idéal maximal. Soit I un idéal propre de A. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est local et I est son idéal maximal

b) $A^\times = A \setminus I$

c) I est maximal et $1 + I \subset A^\times$.

Exercice 10. Soient $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et J un idéal de B. Montrer que :

a) si J est premier (dans B) alors $f^{-1}(J)$ est premier (dans A) ;

b) si J est maximal (dans B) et f surjectif alors $f^{-1}(J)$ est maximal (dans A) ;

Exercice 11. Soient K un corps, $P(X)$ irréductible dans $K[X]$ (donc dans $K[X, Y]$), $Q(Y) \in K[Y] \setminus \{0\}$, M un idéal premier de $K[X, Y]$ contenant $P(X)$ et $Q(Y)$. Montrer que M est maximal.

Exercice 12. Soit A un anneau commutatif, on sait que tout idéal maximal est premier. Montrer que la réciproque est fausse pour $A = B[X]$ où B est un anneau (commutatif) intègre mais n'est pas un corps (par exemple $B = F[Y]$ pour un corps F, ou bien $B = \mathbf{Z}$). (Considérer le morphisme d'anneaux $A \mapsto B, P(X) \mapsto P(0)$).