L3 Mathématiques Fondamentales — Algèbre
2008-09
Corrigé abrégé de l'examen final, du 18 décembre 2008

1. Racines d'un polynôme

1.1. Pour voir que P est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ il suffit d'appliquer le critère d'Eisteinstein avec $p = 2$. Comme P est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbf{Z}$, P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ d'après le cours.

1.2. Notons $S_1 = \sum x_i$ et $S_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$. L'une des formules de Newton (ou un calcul direct) montre que $N_2 = S_1^2 - 2S_2$. Ici $S_1 = 0, S_2 = 2$, donc $N_2 = -2$. Les x_i ne peuvent donc pas être tous réels.

1.3. $P(-1) = 19 > 0$, $P(1) = -23 < 0$ donc P a une racine réelle au moins entre $-\infty$ et -1, une entre -1 et 1, et une entre 1 et ∞. Mais P a au moins une racine complexe non réelle d'après la question suivante, en fait deux puisque le conjugué d'une racine est aussi racine. Donc P a exactement trois racines réelles.

2. Exercice

Soit I l'ensemble des polynômes dont le terme constant est nul. On vérifie sans difficulté que c'est un idéal. Supposons que $K[X, Y]$ soit principal, alors I serait engendré par un élément, disons P, alors on aurait $I = PK[X, Y]$, en particulier on aurait $X = PQ$ et $Y = PR$, où $Q, R \in K[X, Y]$. Comme P est degré au moins 1, et X et Y sont de degré 1, Q et R sont de degré 0. Ainsi P devrait être un multiple à la fois de X et de Y par un élément de K, ce qui est impossible. Donc $K[X, Y]$ n'est pas principal.

3. Idéaux premiers et primaires

3.1. Soit I un idéal nilpotent. Il existe $n > 1$ tel que $x^n = 0$, si bien que $x^n \in I$. Alors $x.x^{n-1} \in I$ et comme I est premier, soit $x \in I$, soit $x^{n-1} \in I$. Dans le premier cas, le résultat est montré. Dans le second cas, $x.x^{n-2} \in I$, si bien que $x \in I$ ou $x^{n-2} \in I$. En répétant l'argument encore $n - 3$ fois on obtient que $x \in I$.

3.2. Soit $a \in A$ avec $a = bc$, $b, c \in A$. Suppposons que b, c ne sont pas dans I, alors l'idéal engendré par b et I (resp. c et I) contient une puissance de x (par maximalité de I). En d'autres termes il existe $y, z \in A$, $b', c' \in I$ et $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $b' + by = x^n, c' + cz = x^m$. Mais alors $ayz = (x^n - b')(x^m - c') = x^{n+m} + d$, où $d \in I$. Il suit que a n'est pas dans I, et on a montré que I est premier.

3.3. On a vu dans la question précédente qu'un élément non nilpotent n'est pas contenu dans tous les idéaux premiers de A.

3.4. Soit p un nombre premier et soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Montrons que $a = p^n\mathbf{Z}$ est un idéal premier. En effet, si $a \in I$ et $a = bc$ alors p divise a donc p divise b ou c, donc soit b^n, soit c^n est dans I. Donc I est primaire.

Réciproquement, soit I un idéal qui n'est pas de cette forme. Alors $I = k\mathbf{Z}$ où k n'est pas une puissance d'un nombre premier. Ainsi $k = k'k''$, où k' et k'' sont premiers entre eux. Alors ni k' ni k'' n'a de puissance divisible par k, et donc I n'est pas primaire.

Les idéaux primaires de $\mathbf{Z}$ sont donc les idéaux de la forme $p^n\mathbf{Z}$, où p est premier et $n \geq 1$.

3.5. Il suit de la définition que $I \subset \sqrt{I}$, et donc $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$. Réciproquement, soit $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n \in \sqrt{I}$, donc il existe m tel que $(x^n)^m \in I$, donc $x^{nm} \in I$, donc $x \in \sqrt{I}$. Donc $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

3.6. Soit $a \in \sqrt{I}, a = bc$. Alors il existe n tel que $a^n \in I$, si bien que $b^n c^n \in I$. Comme I est primaire, un argument de récurrence assez facile sur n (laissé au lecteur) montre qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $b^m \in I$ ou que $c^m \in I$. Ainsi $b \in \sqrt{I}$ ou $c \in \sqrt{I}$. Donc $\sqrt{I}$ est premier.

4. Réductibilité dans le corps des fractions

4.1. Oui : $2X$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$ car 2 est inversible, mais il n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

4.2. Soit $P \in A[X]$ tel que $P = QR$, où Q et R sont $K[X]$ non inversibles, donc de degré au moins 1. Alors en appellant q, r les pgcd des dénominateurs des coefficients de Q et R on voit que

$$qrP = Q'R' \ ,$$

où $Q' = qQ, R' = rR \in A[X]$. Mais alors

$$qr.cont(P) = cont(Q')cont(R') \ ,$$

donc

$$P = cont(P)\frac{Q'}{cont(Q')}\frac{R'}{cont(R')} \ ,$$

si bien que P est réductible dans $A[X]$.

4.3. Les classes de X et Y sont clairement irréductibles dans cet anneau (...). Mais $[X^3] = [X].[X].[X] = [Y].[Y]$ ce qui montre bien qu'il n'y pas pas unicité de la décomposition en produit d'éléments irréductibles.

4.4. On note que $[X]^4 = [Y]^2[X]$ dans A'. Donc $T^2 - [X] = (T - [X^2]/[Y])(T + [X^2]/[Y])$, et P n'est pas irréductible dans $K'[T]$.