L3 Mathématiques Fondamentales — Algèbre
2008-09
Examen final, 15 décembre 2008, 13h–16h
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

Barême indicatif : 1 - 6 points, 2 - 2 points, 3 - 6 points, 4 - 6 points. Mais certaines questions des exercices 3 et 4 pourront être notées hors barême.

1. Racines d'un polynôme

Soit $P = X^5 + 2X^3 - 24X - 2$.

1.1. Montrer que P est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.

1.2. Soient $x_1, \cdots, x_5$ les racines complexes de P. Calculer $N_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$. En déduire que les racines de P ne sont pas toutes réelles.

1.3. Combien P a-t-il de racines réelles ? (On pourra calculer $P(-1)$ et $P(0)$).

2. Exercice

Soit K un corps, montrer que $K[X, Y]$ n'est pas un anneau principal

3. Idéaux premiers et primaires

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un élément x de A est *nilpotent* s'il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$.

3.1. Montrer que si x est nilpotent, alors il est contenu dans tous les idéaux premiers de A.

3.2. On veut maintenant montrer que tout élément qui appartient à tous les idéaux premiers de A est nilpotent. On considère donc un élément $x \in A$ non nilpotent, et on *admet* qu'il existe un idéal I qui ne contient aucun $x^n, n \geq 1$, et qui est maximal parmi les idéaux ayant cette propriétés (l'existence d'un tel idéal suit d'une application du lemme de Zorn). Montrer que I est premier.

3.3. Conclure que tout élément de A qui appartient à tous les idéaux premiers de A est nilpotent.

On dit qu'un idéal I de A est *primaire* si, pour tout $x, y \in A$, $xy \in I$ implique qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que soit $x^n \in I$, soit $y^n \in I$.

3.4. Déterminer les idéaux primaires de $\mathbf{Z}$.

Etant donné un idéal I de A, on appelle idéal radical de I, et on note $\sqrt{I}$, l'ensemble des $x \in A$ tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ avec $x^n \in I$.

3.5. Montrer que pour tout idéal I de A, $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$.

3.6. Montrer que le radical d'un idéal primaire est premier.

4. Réductibilité dans le corps des fractions

On considère un anneau intègre A et son corps des fractions K.

4.1. Un polynôme de $A[X]$ peut-il être réductible dans $A[X]$ mais irréductible dans $K[X]$? On répondra par une preuve ou par un contre-exemple.

4.2. On suppose maintenant A factoriel, montrer que tout polynôme irréductible dans $A[X]$ est irréductible dans $K[X]$.

4.3. On considère l'anneau $A' = \mathbf{R}[X, Y]/(Y^2 - X^3)$. Montrer que A' est intègre. On notera $[P]$ la classe d'un polynôme P.

4.4. Soit K' le corps des fractions de A'. Soit $P(T) = T^2 - [X] \in A'[T]$. Montrer que P est irréductible dans $A'[T]$ mais réductible dans $K'[T]$.

4.5 Qu'en déduit-on sur A' ?