L3 Mathématiques Fondamentales — Algèbre
2008-09
Examen partiel, 30 octobre 2008
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Exercice

Soit G un groupe.

1.1. Rappeler pourquoi pour tout $g \in G$ l'application $h \mapsto hgh^{-1}$ est un automorphisme de G. Ces automorphismes sont appelés automorphismes intérieurs de G.

1.2. Montrer que les automorphismes intérieurs de G forment un groupe, et qu'il est isomorphe au quotient de G par son centre $Z(G)$.

2. Exercice

Soient G un groupe et
$$D(G) = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$$
le sous-groupe engendré par les *commutateurs* de G ou *groupe dérivé.*

2.1. Montrez que pour tout endomorphisme f de G, on a $f(D(G)) \subset D(G)$. En déduire de $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

2.2. Montrer que $G/D(G)$ est abélien.

2.3. Soit N un sous-groupe distingué de G. Montrez que G/N est abélien si et seulement si $D(G) \subset N$.

2.4. Soit A un groupe abélien et $f : G \to A$ un morphisme de groupe. Montrez que $D(G) \subset Ker(f)$. En déduire qu'il existe un unique morphisme $\bar{f} : G/D(G) \to A$ tel que $\bar{f} \circ p = f$ où $p : G \to G/D(G)$ est la surjection canonique.

3. Exercice

On considère $\mathbf{Z}$ comme un sous-groupe du groupe (additif) $\mathbf{Q}$.

3.1. Montrer que chaque élément de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est représenté par (contient) un unique élément de $\mathbf{Q} \cap [0, 1[$.

3.2. Montrer que tous les éléments de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ sont de torsion (c'est-à-dire d'ordre fini).

3.3. Montrer que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est infini.

4. Exercice

4.1. Décrire tous les groupes abéliens d'ordre 4, à isomorphisme près.

4.2. De même pour les groupes abéliens d'ordre p^2, lorsque p est un nombre premier.

4.3. De même pour les groupes abéliens d'ordre 15.

5. Exercice

5.1. Soit G un groupe, et H un p-sous-groupe de Sylow de G. On note n_p le nombre de p-sous-groupes de Sylow de G, montrer que H est distingué si et seulement si $n_p = 1$.

5.2. Montrer qu'un groupe d'ordre 40 n'est jamais simple.