

L3 Mathématiques Fondamentales — Algèbre
2008-09

Examen de rattrapage, 3 Septembre 2009

On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !

Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

Le barème indiqué est seulement indicatif.

1. Éléments nilpotents (4 pts)

Soit A un anneau. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe $n > 0$ entier tel que $a^n = 0$.

1.1 Quels anneaux parmi \mathbf{Z} , $\mathbf{R}[X]$, $M_2(\mathbf{R})$ contiennent un élément nilpotent non nul ? (Les réponses devront être justifiées).

1.2 Montrer que si a est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible, et calculer son inverse.

1.3 Montrer que, si A est commutatif, alors l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal.

1.4 Est-ce généralement vrai si A n'est pas supposé commutatif ?

2. Sous-groupe engendré (8 pts)

Soit P une partie non vide d'un groupe G .

2.1 Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide (quelconque) de sous-groupes de G contenant P . Montrer que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G contenant P .

2.2 En déduire qu'il existe un plus petit sous-groupe de G contenant P . On le notera $\langle P \rangle$.

2.3 Soit L l'ensemble des éléments de G qui sont soit l'élément neutre, soit le produit d'un nombre fini d'éléments de P ou d'inverses d'éléments de P . Montrer que L est un sous-groupe de G .

2.4 Montrer que $L = \langle P \rangle$.

2.5 Soit $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupe. Montrer que $\langle f(P) \rangle = f(\langle P \rangle)$.

3. Groupes d'ordre 45 (8 pts)

On considère un groupe G d'ordre 45.

3.1 Montrer que G contient un unique 3-Sylow, qu'on notera G_3 . Montrer que ce sous-groupe est distingué.

3.2 Montrer que G contient un unique 5-Sylow, qu'on notera G_5 , et qu'il est distingué.

3.3 Déterminer l'intersection de G_3 et de G_5 .

3.4 Déduire de 3.3 que tout élément $x \in G_3$ commute avec tout élément $y \in G_5$ (on pourra montrer que $xyx^{-1}y^{-1}$ appartient à $G_3 \cap G_5$).

3.5 Montrer que G est abélien.