UNIVERSITE PAUL SABATIER

Examen de Topologie, MAPES L3, Janvier 2009

Exercice 1. Soient A et B deux parties non-vides du plan $(\mathbb{R}^2, d)$, où d dénote la distance euclidienne usuelle.

i) Montrer que si A est fermé et B est compact alors il existe deux points $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a,b) = \inf\{d(p,q) \mid p \in A, q \in B\}$

ii) Supposons maintenant que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = -1\}$. Montrer que A et B sont fermés mais non-compacts, et qu'il n'existe pas $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a,b) = \inf\{d(p,q) \mid p \in A, q \in B\}$

Exercice 2. Notons $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$. Soit ϕ une fonction polynomiale non-nulle. Posons $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ et $N_\phi(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)\phi(x)|dx$ pour $f \in E$. Admettons que N_1 et N_ϕ sont des normes sur E.

i) Montrer que l'application identité $Id : (E, N_1) \to (E, N_g)$ est continue.

ii) Montrer que si le polynome ϕ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0,1]$ alors les deux normes N_1 et N_ϕ sont équivalentes.

iii) Montrer que si le polynome ϕ admet au moins une racine sur l'intervalle $[0,1]$ alors les deux normes N_1 et N_ϕ ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. Notons $\ell_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C} \ \forall n, \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ l'espace hilbertien des suites numériques complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2$ converge, avec le produit scalair hermitien $\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$. Notons $K = \{(x_n) \in \ell_2 \mid |x_n| = \frac{1}{n+1} \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}$.

i) Montrer que K est borné.

ii) Montrer que K est fermé.

iii) Montrer que K est connexe par arcs.

iv) Montrer que K est compact.