L3 MAPES — Topologie
2008-09
Feuille d'exercice no 3

1. On considère une isométrie u de $\mathbf{R}$, muni de sa distance usuelle, dans $(\mathbf{R}^2, d_E)$. Montrer que l'image de u est une droite. Qu'en est-il si on remplace d_E par la distance d_∞ définie par

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max(|x'-x|,|y'-y|)\ ?$$

2. Montrer que $(C^0([0,1]), d_\infty)$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la distance sup, est complet.

3 *. 1. Montrer que l_∞ est complet pour la distance sup d_∞.
2. Montrer que le sous-ensemble de l_∞ constitué des suites dont tous les termes sont dans $[-1,1]$ est compact.
Indication : On pourra utiliser le procédé diagonal vu en cours pour extraire une suite d'une suite de suites...

4. Soit (E,d) un espace métrique.
1. Montrer que $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est une distance sur E. Enoncer des conditions suffisantes sur une fonction f, définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ pour que $(x,y) \longrightarrow f(d(x,y))$ soit une distance sur E.
2. Montrer que l'application d'' définie sur $E \times E$ par $d''(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une distance sur E. Indication : On utilisera la croissance de la fonction $u \longrightarrow \dfrac{u}{1+u}$.
3. Comparer les distances d et d'' .
4. Dans le cas où E est l'ensemble des nombres réels et où d est la valeur absolue, construire $B_{d''}(0,a)$ où a est un réel.

5*. On note L^2 l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\int f^2(t)dt$ converge.
1. Montrer que si $f, g \in L^2$, alors $\int f(t)g(t)dt$ converge, et que

$$\left|\int f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \int f(t)^2dt \int g(t)^2dt\ .$$

2. Pour $f \in L^2$, on pose

$$N(f) = \left(\int f(t)^2 dt\right)^{1/2}\ .$$

Montrer que si $f, g \in L^2$ alors $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.

6 **. Soit (E,d) un espace métrique. On considère l'ensemble F des suites de Cauchy dans E, et la relation R sur F définie de la manière suivante : $(u_n)R(v_n)$ ssi la suite (w_n) définie par $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$ est de Cauchy.
1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur F.
2. On note E' le quotient de F par R (l'ensemble des classes d'équivalence pour R dans F). Montrer qu'il existe une application naturelle injective u, qu'on précisera, de E dans E', et que u est bijective ssi E est complet.
3. On suppose que $E = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Qu'est-ce que E', quelle est l'image de u ?
4. Montrer que d définit une distance d' sur F, puis sur E', telle que u est une isométrie de (E,d) dans (E',d').
5. Montrer que (E',d') est complet.
6. Montrer que si $v : (E,d) \to (G,\delta)$ est une isométrie et si (G,δ) est complet alors il existe une isométrie $w : (E',d') \to (G,\delta)$ telle que $v = w \circ u$.
NB : (E',d') est le complété de (E,d).

7. Soit (E,d) un espace métrique compact, soit $\epsilon > 0$.
1. Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini F de E tel que tout point de E est à distance au plus ϵ de F.
2. Montrer qu'il existe un sous-ensemble fini F de E tel que
- tout point de E est à distance au plus ϵ de F,
- deux points de F sont à distance au moins $\epsilon/2$.

8*. A propos de la construction de R. On appelle $\mathcal{R}$ l'ensemble des sous-ensembles $E \subset \mathbf{Q}$ majorés tels que $x \in E, y \leq x \Rightarrow y \in E$.

1. Montrer qu'il existe une injection naturelle $i : \mathbf{Q} \to \mathcal{R}$ qu'on précisera.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est muni d'une relation d'ordre naturelle, dont la restriction à $i(\mathbf{Q})$ coincide avec la relation d'ordre usuelle de $\mathbf{Q}$. Montrer que cette relation d'ordre est stricte.
3. Montrer que $\mathcal{R}$ est muni d'une distance naturelle dont la restriction à $i(\mathbf{Q})$ coincide avec la distance usuelle sur $\mathbf{Q}$.
4. Montrer que $i(\mathbf{Q})$ est dense dans $\mathcal{R}$ pour la distance définie à la question précédente.
5. Montrer que $\mathcal{R}$ a la propriété de la borne supérieure.
6. Montrer que $\mathcal{R}$ peut être muni d'une structure de groupe, en définissant une addition dont la restriction à $i(\mathbf{Q})$ coincide avec l'addition usuelle de $\mathbf{Q}$.
7. Montrer que $\mathcal{R}$ est complet.