L3 MAPES — Topologie
2008-09
Examen partiel, 29 octobre 2008
Corrigé abrégé

1. Question de cours

1.1. D'après la définition d'une suite convergente,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon .$$

On applique ceci pour $\epsilon = 1$, on obtient que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq |l| + 1 .$$

On pose alors

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_n|, |l| + 1) ,$$

et on voit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leq M$. La suite est donc bornée.

1.2. Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites, convergeant respectivement vers l et l'. D'après la première question, $|u_n| \leq M$ pour tout n, pour un certain $M > 0$. On suppose $M > 1$ (si ça n'est pas le cas, on remplace M par 1). On remarque que pour tout n,

$$|u_n v_n - ll'| \leq |u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)| \leq |u_n|.|v_n - l'| + |l'|.|u_n - l| \leq M|v_n - l'| + |l'|.|u_n - l| .$$

On pose $M' = \max(M, |l'|)$. Soit $\epsilon > 0$, d'après la convergence de (u_n) et de (v_n), il existe $N, N' \in \mathbf{N}$ tels que

$$\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon/2M' ,$$
$$\forall n \geq N', |v_n - l'| \leq \epsilon/2M' .$$

Soit $n_0 = \max(N, N')$, on a pour tout $n \geq n_0$ que

$$|u_n v_n - ll'| \leq \epsilon M/2M' + \epsilon |l'|/2M' \leq \epsilon .$$

ainsi, $(u_n v_n)$ converge vers ll'.

2. Problème

2.1. Pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a :

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n - v_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| + |v_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n| + \sum_{n=0}^{N} |v_n| .$$

En passant à la limite on voit que $\sum |u_n - v_n|$ est convergente, donc d_1 est bien définie.

2.2. Il faut vérifier trois points.

- Si $(u_n), (v_n) \in l^1$ sont tels que $d_1((u_n), (v_n)) = 0$ alors $\sum_n |u_n - v_n| = 0$ donc $u_n = v_n$ pour tout n, donc $(u_n) = (v_n)$.
- $d_1((u_n), (v_n)) = d_1((v_n), (u_n))$ par définition de d_1.

– Si $(u_n), (v_n), (w_n) \in l^1$ on a

$$d_1((u_n),(w_n)) = \sum_n |w_n - u_n| = \sum_n |(w_n - v_n) + (v_n - u_n)| \leq \sum_n |w_n - v_n| + |v_n - u_n| \leq$$

$$\leq \sum_n |w_n - v_n| + \sum_n |v_n - u_n| = d_1((u_n),(v_n)) + d_1((v_n),(w_n)) \ .$$

d_1 est donc une distance.

2.3. On considère la suite $(\delta^k)_{k\in\mathbf{N}}$ suggérée dans l'énoncé, elle est contenue dans la boule fermée $B_f(0,1)$. On va montrer qu'elle n'a pas de sous-suite convergente, supposons donc (par l'absurde) que $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante telle que $\delta^{\sigma(k)}$ converge vers une limite u. u est donc une suite (u_n). Alors on a

$$\lim_{k\to\infty} d_1(\delta^{\sigma(k)}, u) = 0 \ .$$

La définition de d_1 comme borne sup montre alors que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \lim_{k\to\infty} d_1(\delta_n^{\sigma(k)}, u_n) = 0 \ .$$

Comme $\delta_n^{\sigma(k)} = 0$ pour $k > n$ (car $\sigma(k) \geq k > n$) on voit que $u_n = 0$ pour tout n, donc $\delta^{\sigma(k)} \to 0$. Or $d_1(\delta^{\sigma(k)}, 0) = 1$ pour tout k. Donc δ^k n'admet pas de sous-suite convergente.

2.4. On appelle u^N la suite égale à $1/N$ pour $n < N$ et à 0 pour $n \geq N$. Alors

$$d_1(u^N, 0) = \sum_{n=0}^{N-1} 1/N = 1 \ ,$$

alors que

$$d_2(u^N, 0) = \sum_{n=0}^{N-1} 1/N^2 = 1/N \to 0 \ ,$$

Cette suite converge donc vers 0 pour d_2 mais pas pour d_1.

2.5. Soit $(u_n) \in l^1 \cap l^2$, soit $N \in \mathbf{N}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n| \right)^2 \ .$$

En passant à la limite quand $N \to \infty$ on voit que pour tout $(u_n) \in l^1 \cap l^2$, $d_2((u_n), 0) \leq (d_1((u_n), 0))^2$. Si une suite $(U^k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $l^1 \cap l^2$ converge vers 0 pour d_1, elle converge donc aussi vers 0 pour d_2.

2.6. Non, si d_1 et d_2 étaient équivalentes sur $l^1 \cap l^2$ il suivrait que toute suite d'éléments de $l^1 \cap l^2$ qui converge vers 0 pour d_2 converge aussi vers 0 pour d_1, or on a vu dans la question 2.4 que ça n'est pas le cas.

3. Exercice

3.1. On constate avec un dessin que A est une spirale, on va vérifier que $Adh(A)$ est la réunion de A est du cercle S^1 de rayon 1 . Soit t_n une suite d'éléments de $\mathbf{R}_+$ telle que $f(t_n)$ converge vers une limite l. Alors $\|f(t_n)\| \to \|l\|$, donc $\tanh(t_n) \to \|l\|$, si bien que t_n tend vers une limite L, qui est soit ∞ (si $\|l\| = 1$) soit $\text{argtanh}(\|l\|)$ (si $\|l\| < 1$). Dans le premier cas, $L \in S^1$, et dans le second cas $l = f(L) \in A$. Ainsi, $Adh(A) \subset A \cup S^1$.

Il est clair que $A \subset Adh(A)$, reste à montrer que $S^1 \subset Adh(A)$. Soit $m \in S^1$, on peut l'écrire sous la forme $m = (\cos(t), \sin(t))$, avec $t \in \mathbf{R}_+$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$: $t_n = t + 2n\pi$. Alors $f(t_n) = \tanh(t + 2n\pi)(\cos(t_n), \sin(t_n)) = \tanh(t + 2n\pi)m \to m$, et donc $m \in Adh(A)$.

3.2. Si A était compact il serait fermé, et donc son adhérence serait lui-même. Or on vient de voir que ça n'est pas le cas, il n'est donc pas compact.

3.3. $Adh(A)$ est fermé par définition, et borné puisque tout ses éléments sont de norme au plus 1. Il est donc compact d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

3.4. $\mathbf{R}_+$ est connexe, donc A est l'image d'un connexe par une application continue, donc A est connexe.

Soit $u : Adh(A) \to \{0, 1\}$ une application continue. Comme A est connexe, la restriction de u à A est constante, on suppose par exemple qu'elle est égale à 0. On a vu dans la question 1. que tout point de m de S^1 est limite d'une suite d'éléments de A, il suit par continuité de u que $u(m) = 0$. Comme u est égale à 0 sur A et sur S^1, elle est égale à 0 sur $Adh(A)$, donc A est connexe.

3.5. A est l'image d'un connexe par arcs par une application continue, donc est connexe par arcs.

On va montrer par l'absurde que $Adh(A)$ n'est pas connexe par arcs, on suppose donc l'existence d'une application continue $c : [0, 1] \to Adh(A)$ telle que $c(0) = 0$ et $c(1) = (1, 0)$. Comme c est continue, l'application $s \to \|c(s)\|$ est aussi continue, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une suite (s_k) croissante telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$ on ait

$$\|c(s_{2k}\| = \tanh(2k\pi) \ , \quad \|c(s_{2k+1}\| = \tanh(\pi + 2k\pi) \ .$$

La définition de A montre alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$c(s_{2k}) = f(2k\pi) \ , \quad c(s_{2k+1}) = f(\pi + 2k\pi) \ .$$

Or pour tout $k \geq 1$ on remarque que la distance entre $f(2k\pi)$ et $f(\pi + 2k\pi)$ est supérieure à $1/2$. Il suit que pour tout k, $d(c(s_{2k}), c(s_{2k+1})) \geq 1/2$. Comme (s_k) est une suite croissante dans $[0, 1]$, il existe pour tout $\epsilon > 0$ un $k \in \mathbf{N}$ tel que $s_{2k+1} - s_{2k} \leq \epsilon$, et on vient de voir que $d(c(s_{2k}), c(s_{2k+1})) \geq 1/2$. Ceci contredit l'uniforme continuité de c, or c est continue sur un compact donc uniformément continue. $Adh(A)$ n'est donc pas connexe par arcs.