L3 MAPES — Topologie
2008-09
Examen partiel, 29 octobre 2008
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Question de cours

1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui admet une limite l. Montrer (rigoureusement) que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
1.2. Montrer que le produit de deux suites réelles convergentes est une suite convergente.

2. Problème

On note l^1 l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que la série $\sum_n |u_n|$ est convergente.
2.1. Pour $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on note

$$d_1((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_n |v_n - u_n| \ .$$

Montrer que d_1 est bien définie.
2.2. Montrer que d_1 définit une distance sur l^1.
2.3. On considère l'espace métrique (l^1, d_1), on note 0 la suite nulle. La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 est-elle compacte ? (On pourra considérer la suite $(\delta^k)_{k\in\mathbf{N}}$, où δ^k est la suite qui vaut 1 en k et 0 ailleurs.
On note maintenant l^2 l'ensemble des suites de carré sommable, et $d_2 : l^2 \times l^2$ la fonction définie par

$$d_2((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_n |v_n - u_n|^2 \ .$$

On admettra ici que d_2 est bien définie et détermine une distance sur l^2.
2.4. Existe-t-il une suite d'éléments de $l^1 \cap l^2$ qui converge vers 0 pour d_2 mais pas pour d_1 ? (On pourra considérer des éléments de $l^1 \cap l^2$ qui sont des suites constantes jusqu'à un certain rang puis nulles.)
2.5. Existe-t-il une suite d'éléments de $l^1 \cap l^2$ qui converge vers 0 pour d_1 mais pas pour d_2 ? (On pourra montrer que pour tout élément $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in l^1 \cap l^2$, $d_2((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, 0) \leq d_1((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, 0)^2$.)
2.6. Les distances d_1 et d_2 sont-elles équivalentes sur $l^1 \cap l^2$?

3. Exercice

On considère l'appplication $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x) = (\tanh(x)\cos(x), \tanh(x)\sin(x)) \ .$$

Notons $A = f([0, \infty[)$ l'image de f dans $\mathbf{R}^2$ equipé de la métrique euclidienne.
3.1. Déterminer l'ensemble $adh(A) \setminus A$. (On pourra faire un dessin !) (On pourra montrer que si $(f(t_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors soit (t_n) converge vers une limite finie, soit $(t_n) \to \infty$.)
3.2. Montrer que A n'est pas compact.
3.3. Montrer que $adh(A)$ est compact.
3.4. Montrer que A est connexe, puis que $adh(A)$ est connexe
3.5. Montrer que A est connexe par arcs, mais que $adh(A)$ n'est pas connexe par arcs.