L3 MAPES — Topologie
2008-09
Examen de rattrapage, 2 Septembre 2009
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.
Le barême indiqué est seulement indicatif.

1. Question de cours (4 pts)

Montrer (rigoureusement) que le produit de deux suites convergentes est convergente.

2. Exercice (6 pts)

Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $f : E \to E$ une application telle que f^2 est contractante :

$$\exists k \in]0, 1[, \forall x, y \in E, d(f^2(x), f^2(y)) \leq kd(x, y) \ .$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

3. Exercice (10 pts)

On note l^2 l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum_{\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$, muni du produit scalaire :

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_n a_n \overline{b_n} \ .$$

On rappelle que c'est un espace de Hilbert. On note

$$h^1 = \{(a_n) \in l^2 \mid \sum n^2 |a_n|^2 < \infty\} \ .$$

3.1. Pour $(a_n), (b_n) \in h^1$, on pose :

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle_1 = \sum_n (1 + n^2) a_n \overline{b_n} \ .$$

Montrer que l'expression de droite est bien définie, puis que cette équation définit un produit scalaire sur h^1.

3.2. Montrer que h^1 est dense dans l^2.

3.3. On note N la restriction à h^1 de la norme de l^2. Comparer N et la norme associée à $\langle , \rangle_1$, qu'on pourra appeller N_1. (Sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une est plus grande que l'autre ?)