Université Toulouse 3, 2009-2010

L3 Maths Fondamentales, algèbre **Examen final, 5 janvier 2010**

Exercice 1 On se place dans $GL(2,\mathbb{R})$, le groupe des matrices $(2,2)$ inversibles à coefficients réels.

1. (a) Soit H l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), p \in \mathbb{Z}$. Montrer que H est un sous-groupe abélien.
   (b) Montrer que H est cyclique, c'est-à-dire engendré par un élément. Est-il distingué ?
2. Soient $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A et B appartiennent à $SL(2,\mathbb{Z})$, calculer leurs ordres et montrer que H est contenu dans $< A, B >$.
   (b) Que pensez-vous des assertions suivantes ?
   – "un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini."
   – "tous les éléments d'un groupe engendré par des éléments d'ordre fini sont d'ordre fini."
   (c) Le groupe engendré par A et B est-il abélien ?
   (d) Calculer l'intersection du groupe cyclique engendré par A et du groupe cyclique engendré par B.

Exercice 2 On rappelle qu'un groupe cyclique est un groupe engendré par un seul élément.

1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
2. On dit qu'un groupe est localement cyclique si chaque sous-ensemble fini engendre un sous-groupe cyclique. Montrer que $\mathbb{Q}$ est localement cyclique, mais pas cyclique.
3. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini.

Exercice 3 Montrer qu'un groupe d'ordre 255 n'est jamais simple.

Exercice 4 1. Combien de sous-anneaux contient l'anneau $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Les décrire.

2. F et F' étant deux corps, combien $F \times F'$ contient-il d'idéaux non-triviaux ? Montrer que c'est un anneau principal.

Exercice 5 Soit A un anneau principal, et soient $a, b, c \in A \setminus \{0\}$. Montrer qu'on a les égalités :

1. $\mathrm{pgcd}(ca, cb) \sim c\,\mathrm{pgcd}(a, b)$
2. $\mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a, b), c) \sim \mathrm{pgcd}(a, \mathrm{pgcd}(b, c))$.
3. $\mathrm{pgcd}(a, b) \sim 1$ et $\mathrm{pgcd}(a, c) \sim 1$ implique $\mathrm{pgcd}(a, bc) \sim 1$.
4. Si $a|bc$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) \sim 1$ alors $a|c$.
5. Si $b|a$ et $c|a$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) \sim 1$ alors $bc|a$.

Exercice 6 1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un nombre sans facteurs carrés, $a \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$. Montrer que $X^n - a$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Démontrer l'irréducibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes $X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 6X + 2$ et $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$.