L3 MF — Algèbre
2009-10
Examen partiel, 28 octobre 2009
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Exercice. On considère $\mathbb{R}$ muni de l'opération suivante :
$$x * y = (x^5 + y^5)^{1/5} \ .$$
Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe, puis qu'il est isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

2. Exercice. Soit G un groupe engendré par deux éléments distincts a et b (distincts de l'élément neutre e) satisfaisant les relations $a^3 = e$, $b^2 = e$ et $abab = e$. Décrire le groupe et indiquer un groupe classique qui lui est isomorphe.

3. Exercice. 1. Décrire le centre de S_n. (On pourra utiliser le fait qu'un élément du centre de S_n doit commuter à toutes les transpositions. On pourra aussi distinguer différentes valeurs de n.)

2. Décrire de même le centre de A_n. (On pourra là encore distinguer différentes valeurs de n).

4. Exercice. Soit G un groupe, soit $H < G$. On appelle normalisateur de H l'ensemble $N(H)$ des $g \in G$ tels que $gHg^{-1} = H$.

1. Montrer que $N(H)$ est un sous-groupe de G contenant H, et que H est distingué dans $N(H)$.

2. Soit K un sous-groupe contenant H et dans lequel H est distingué. Montrer que K est un sous-groupe de $N(H)$. En déduire que $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.

3. Soit K un sous-groupe de $N(H)$, montrer que HK est un sous-groupe, et que H est distingué dans HK.

4. Soient H et K deux sous-groupes de G, montrer que HK est un sous-groupe si et seulement si $HK = KH$.

5. Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Montrer que les éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ sont exactement les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

2. Montrer que le groupe des automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^{\times}, \times)$, le groupe des éléments inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (On pourra utiliser l'application qui à un automorphisme ϕ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ associe $\phi(1)$.)