L3 Maths fondamentales — Algèbre
2009-10
Feuille d'exercice no 1

1. Soit G un groupe.

1. Montrer que l'élément neutre de G est unique.
2. Montrer que si $a \in G$ est inversible à droite et qu'il est inversible à gauche, alors a est inversible.

2.

1. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{R}$ par : $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Identifier $E/\mathcal{R}$.
2. Mêmes questions avec $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$.

3. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par : $(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow y = y'$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

4. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

" $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique, or ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) $\Rightarrow x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive, donc $\mathcal{R}$ est réflexive."

5. Soit G un ensemble muni d'une loi $*$ associative vérifiant :

$$\exists e \in G, \forall a \in G, e * a = a \ ,$$

$$\forall a \in G, \exists b \in G, b * a = e \ .$$

Montrer que $(G,*)$ est un groupe.

6. Soit G un groupe tel que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Montrer que G est commutatif.

7.

1. Dresser la liste de tous les sous-groupes de $\mathbf{Z}/2Z \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. La réunion de deux sous-groupes A et B d'un groupe G est-elle un sous-groupe ?
3. Donner une CNS pour que $A \cup B$ soit un sous-groupe.

8. Montrer que $T_n(\mathbf{R})$ et $TU_n(\mathbf{R})$ sont des groupes, où $T_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles triangulaires supérieures, et $TU_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale.

9. Montrer que l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbf{R}$, muni de la composition, est un groupe.

10. Montrer que tout groupe d'ordre premier est commutatif.

11. Soit G un groupe.

1. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de G, muni de la loi de composition, est un groupe, que nous noterons $(\mathcal{G}, \circ)$.
2. Pour tout $h \in G$, on note ϕ_h l'application de G dans G définie par $\phi_h(g) = hgh^{-1}$. Montrer que ϕ_g est un endomorphisme de G. Les endomorphismes de ce type sont appelés endomorphismes intérieurs.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes intérieurs de G forme un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$. Décrire ce sous-groupe quand G est abélien.

12. On note D_n l'ensemble des isométries du plan qui préservent P_n, le n-gone régulier.

1. Montrer que D_n, muni de la composition, est un groupe.
2. Soit
$$G = \{f : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, x \mapsto ax + b \mid a = \pm 1, b \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\}\ .$$
Montrer que G, muni de la composition, est un groupe.
3. Trouver un isomorphisme entre D_n et G.
4. Quelle loi mettre sur $H = \{\pm 1\} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour qu'il soit isomorphe à G ?
5. D_n est-il abélien ?
6. Dresser la liste des automorphismes de D_n.