L3 Maths fondamentales — Algèbre
2009-10
Feuille d'exercice no 3

1. Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. Dans cet exercice, on considère l'action de G sur le groupe quotient G/H par multiplication à gauche. On notera $\rho : G \to S(G/H)$ le morphisme associé à cette action.

1. Montrer que pour tout $g \in G$, on a $Stab(gH) = gHg^{-1}$.
2. En déduire que $Ker(\rho) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$.

2. Soit G un p-groupe (groupe de cardinal p^α avec $\alpha \in \mathbf{N}^*$). On s'intéresse ici au centre de ce groupe défini par :

$$Z(G) = \{g \in G | \forall h \in G, gh = hg\}.$$

1. On fait agir G sur lui-même par conjugaison. Pour chaque classe on prend un représentant et on note Γ l'ensemble de ces représentants. Montrer que $Z(G) \subset \Gamma$.
2. En utilisant la formule des classes, montrer que $\#Z(G) \equiv 0(p)$.
3. En déduire que le centre d'un p-groupe n'est jamais réduit à un élément.

3. Montrer l'assertion suivante : G/Z(G) cyclique $\Rightarrow$ G abélien.
Que peut-on alors dire d'un groupe d'ordre p ? et d'un groupe d'ordre p^2 ?

4. Soit G un groupe et X un ensemble sur lequel G agit.

1. Montrer, à l'aide de la formule des classes, la formule de Burnside :
$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$
2. Soit D_4 le groupe diédral (groupe des isométries préservant un carré). D_4 est-il isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.
3. On se propose de colorier les sommets d'un carré à l'aide de m couleurs. Deux coloriages seront considérés identiques s'il existe un élément de D_4 qui envoie l'un sur l'autre. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?

5. On fixe $n \in \mathbf{N}$

1. Montrer que tout élement de S_n admet une décomposition en cycles disjoints unique à permutation des cycles près.
2. Si $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, on a
$$\sigma(a_1 \ldots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \ldots \sigma(a_k))$$
3. Montrer que S_n engendre les permutations (12) et $(1 \ldots n)$.
4. A quelle condition deux permutations sont elles conjuguées ?

6. Montrer que pour tout $m \geq 2$, $n \geq 2$ et tout morphisme $f : S_n \to S_m$, on a $f(A_n) \subset A_m$.

7. Soit $K \subset S_4$ constitué des éléments suivants : id, $(12)(34)$, $(13)(24)$ et $(14)(23)$.

1. Montrer que $K \triangleleft S_4$ et $K \subset A_4$.
2. Montrer que S_4/K et S_3 sont isomorphes, ainsi que A_4/K et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

8. Dans cet exercice, on cherche à exprimer les classes de conjugaison de A_n (les A_n-classes de conjugaison) et celles de S_n (les S_n-classes de conjugaison)

1. Soit $\sigma \in A_n$ montrer que la S_n-classe de σ est inclue dans A_n.
2. Soit $H \subset S_n$ un sous-groupe. Montrer que $H \cap A_n$ est un sous-groupe de H d'indice 1 ou 2.
3. On considère l'action de S_n sur lui-même par conjugaison et pour $\sigma \in S_n$, on note C_σ le stabilisateur de σ pour cette action. Montrer que si $\sigma \in A_n$ vérifie $C_\sigma \not\subset A_n$ alors la A_n-classe de conjugaison de σ correspond à sa S_n-classe de conjugaison.
4. Soit $\sigma \in A_n$ tel que $C_\sigma \subset A_n$. Montrer que la S_n-classe de conjugaison est la réunion de deux A_n-classes de conjugaison de même ordre.