L3 Maths fondamentales — Algèbre
2009-10
Feuille d'exercice no 5

1. Si p est un nombre premier, quels sont les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$?

2. Soit A un anneau. On dit que $x \in A$ est un élément nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que si A est commutatif alors l'ensemble des éléments nilpotents de A forme un idéal de A.
2. Quel est cet ensemble dans le cas où $A = M_n(\mathbf{R})$?

3. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

4. Montrer que le seul morphisme d'anneau de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est l'identité.

5. Soit A un anneau.

1. Montrer que pour tout $a \in A$ nilpotent, $1 - a$ est inversible. Calculer cet inverse.
2. Soit a et b deux éléments de A. On suppose que ab et ba sont inversibles. Exprimer alors $(1 - ba)^{-1}$ en fonction de $(1 - ab)^{-1}$.
3. Maintenant on ne suppose plus que ab et ba sont inversibles. Montrer dans ce cas que si $1-ab$ est inversible, $1 - ba$ l'est aussi.
4. On fixe $a \in A$ et on considère l'application suivante :

$$u_a : \begin{array}{rcl} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax - xa. \end{array}$$

Montrer que si a est nilpotent alors il existe $p \in \mathbf{N}^\star$ tel que $u_a^p = 0$.

6. Soit p un nombre premier et A un anneau intègre de caractéristique p.

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ on a $p|C_p^k$.
2. En déduire que l'application :

$$F_p : \begin{array}{rcl} A & \to & A \\ a & \mapsto & a^p \end{array}$$

est un morphisme d'anneau.

3. Montrer que $\{a \in A | F_p(a) = a\}$ est le plus petit sous-anneau de A contenant 1.
4. Montrer que si A est fini alors F_p est un automorphisme.
5. Montrer l'égalité suivante :

$$(\sum_i a_i b_i)^{p^k} = \sum_i a_i^{p^k} b_i^{p^k}$$

pour tout $a_i \in A$, $b_i \in A$ et $k \in \mathbf{N}$.

7. On considère :

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathbf{Z} & \to & \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ a & \mapsto & a \; mod \; n \end{array}$$

(cette application est "presque" l'application qui donne le reste de la division euclidienne par n)

1. Montrer que ϕ est un morphisme d'anneau. Donner son noyau et son image.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 1515^{1515} par 7 ?

8. Soit $a, b \in A$ où A est un anneau commutatif

1. Montrer que $A[X]/(X-a)$ est isomorphe à A.
2. Montrer que $A[X,Y]/(Y-b)$ est isomorphe à $A[X]$.
3. Montrer que $A[X,Y]/(X-a, Y-b)$ est isomorphe à A.

9. Soit K un corps. Déterminer les éléments inversibles et les idéaux (principaux et autres) de $K[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$?

10. On se place dans $\mathbf{R}[X]$ et on considère J l'idéal engendré par X^3+3X^2+4X+2 et $X^4+2X^3+3X^2+2X+2$. Donner un isomorphisme entre $\mathbf{R}[X]/J$ et $\mathbf{C}$.

11. On considère $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$.

1. Montrer que c'est un anneau intègre.
2. Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.
3. Est-ce un anneau principal ?