Exercice 1 Dans l'anneau de polynômes $K[X_1, \cdots, X_n]$, on note $\Sigma_j := \Pi_{i=1}^n X_i^j$ les sommes de Newton.

1. Montrer que, dans l'anneau des polynômes à une indéterminée T, à coefficients dans $K[X_1, \cdots, X_n]$, soit $K[X_1, \cdots, X_n][T]$, on a l'égalité

$$\sum_{m \geq 0} (-1)^m S_{m,n} T^m = \Pi_{i=1}^n (1 - X_i T) \ .$$

Ici $S_{m,n}$ est le polynôme symétrique élémentaire de degré m en $X_1, \cdots, X_n$.

2. On pose $F = \Pi_{i=1}^n (1 - X_i T)$. Montrer que

$$F'(T) = n \sum_i -X_i F(T)/(1 - X_i T) \ ,$$

où on justifiera la dernière notation.

3. En développant, montrer les formules de Newton-Girard : pour tout entier $m \geq 1$,

$$m S_{m,n} + \sum_{j=1}^m (-1)^j \Sigma_j S_{m-j,n} = 0 \ .$$

4. En déduire que l'ensemble des polynômes invariants sous l'action du groupe symétrique S_n par permutation des variables, soit $K[X_1, \cdots, X_n]^{S_n}$, vérifie

$$K[X_1, \cdots, X_n]^{S_n} = K[S_{1,n}, \cdots, S_{n,n}] = K[\Sigma_1, \cdots, \Sigma_n] \ .$$

Exercice 2 : 1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien et factoriel.
Indication : il faut prendre $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$, considérer le nombre complexe $\frac{a}{b}$, chercher $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $||\frac{a}{b} - q|| < 1$ et montrer que q ainsi défini est le quotient d'une division euclidienne.

2. Expliquer pourquoi les égalités $(2+i)(2-i) = 5 = (-1-2i)(-1+2i)$ ne mettent pas en défaut la factorialité de $\mathbb{Z}[i]$.

3. Calculer le pgcd de $1 - 13i$ et de $4 + i$ et celui de $1 + 7i$ et de $-8 - i$.

Exercice 3 :

On considère ici $A = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + \sqrt{10}b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et l'application N définie par $N(a + \sqrt{10}b) = a^2 - 10b^2$.

1. Montrer que A est un anneau.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in A$, $N(xy) = N(x)N(y)$. En déduire que les éléments inversibles de A sont les $x \in A$ qui vérifient $|N(x)| = 1$.
3. Montrer que 2 est irréductible dans A.
4. Montrer que 2 n'est pas premier dans A.

Exercice 4 :

Soit A un anneau, I un idéal de A et π la projection canonique $A \to A/I$.

1. Montrer que les idéaux premiers de A/I sont en bijection avec les idéaux premiers de A contenant I.
2. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1)$?

Exercice 5 : 1. Montrer que $\mathbb{Z}[X, Y]$ est un anneau factoriel.

2. Montrer que $X^2 + Y^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X, Y]$.
3. calculer le pgcd de $X^3Y^2 + XY^4 + XY^2$ et de $X^3 + X^2 + XY^2 + Y^2 + X + 1$.

Exercice 6 : Soit A un anneau intègre.

1. Montrer que les éléments inversibles de $A[X]$ sont les inversibles de A.
2. Montrer que tout élément irréductible de A est un élément irréductible de $A[X]$.
3. Trouver un élément inversible de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ de degré non nul.

Exercice 7 : Le théorème des deux carrés

Dans cet exercice, on considère p un nombre premier et on note $\Sigma = \{a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{N}\}$.

On sait maintenant que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.

1. Montrer l'équivalence suivante :

$$p \in \Sigma \Leftrightarrow p\ n'est\ pas\ irreductible\ dans\ \mathbb{Z}[i].$$

Indication : on remarquera que $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(X^2+1)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n = \Pi p^{v_p(n)}$ sa décomposition en facteurs premiers. Montrer que :

$$n \in \Sigma \Leftrightarrow v_p(n)\ pair\ pour\ p\ \equiv 3 \mod 4$$

(théorème des 4 carrés)

3. Déterminer les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 8 : Soient K un corps, P un polynôme de degré p, Q un polynôme de degré q. On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} R_{P,Q} & : & K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] & \to & K_{p+q-1}[X] \\ & & (A,B) & \mapsto & AP + BQ \end{array}$$

On appelle $Res(P,Q)$ le déterminant de $R_{P,Q}$.

1. Que peut-on dire de P et de Q lorsque $Res(P,Q) = 0$?

2. On appelle nombre algébrique tout nombre complexe qui est la racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Montrer que si α et β sont deux nombres algébriques alors leur somme $\gamma = \alpha + \beta$ l'est aussi en déterminant un polynôme qui s'annule en γ.

Indication : Il faut ici considérer le résultant prenant en argument les polynômes $P(X)$ et $Q(\gamma - X)$, où P et Q sont les polynômes à coefficients rationnels qui vérifient $P(\alpha) = 0$ et $Q(\beta) = 0$.

Exercice 9 :

1. Montrer que pour tout nombre premier p, le polynôme $X^p + p$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer que $3X^4 + 10X + 15$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais pas dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $X^2 + X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ en faisant un changement de variable simple (une translation).