L3 MAPES — Topologie
2008-09
Feuille d'exercice no 1

1. Soit E un ensemble, et soient $A, B \in P(E)$. Comparer :

1. $P(A \cup B)$ et $P(A) \cup P(B)$,
2. $P(A \cap B)$ et $P(A) \cap P(B)$.

2. Soit E, F des ensembles, A, B des sous-ensembles de F, et $f : E \to F$ une application. Dire si les deux assertions sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement votre réponse.

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3. De même, si $A, B \subset E$, est-il vrai que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ecrire mathématiquement (avec des quantificateurs) :

1. f est continue sur $\mathbf{R}$,
2. f n'est pas continue sur $\mathbf{R}$.

6. Montrer rigoureusement que :

1. le produit de deux suites qui tendent vers l'infini est une suite tendant vers l'infini,
2. si (u_n) et (v_n) sont deux suites tendant respectivement vers u et v alors leur produit tend vers uv,
3. si (u_n) tend vers l'infini et si (v_n) tend vers $v \neq 0$ alors leur produit tend vers $\pm\infty$ (on précisera).

7. Montrer (rigoureusement) que la composée de deux applications continues est continue.

8. Etudier la continuité des fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par :

1. $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbf{Q}$.
2. $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{Q}$.

9. Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$. Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbf{R}$, sont-elles uniformément continues ?

1. $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$.
2. $f(x) = x$.
3. $f(x) = x^2$.

10. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée, puis que f est uniformément continue.

11. Soit (u_n) une suite, soit $l \in \mathbf{R}$. Montrer que l est valeur d'adhérence de (u_n) ssi

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon \ .$$

12. Soit (u_n) une suite réelle. On considère la suite des moyennes arithmétiques, définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} \ .$$

Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) converge. La réciproque est-elle vraie ?