L3 MAPES — Topologie
2008-09
Feuille d'exercice no 2

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) soient convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

2. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonction continues est continue. Est-ce vrai pour une limite simple de fonctions continues ?

3. Soit (u_n) une suite réelle bornée, on définit

$$\limsup u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k \ ,$$

$$\liminf u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k \ .$$

1. Montrer que ces deux limites existent.
2. Montrer que si l est une valeur d'adhérence de (u_n), alors

$$\liminf u_n \leq l \leq \limsup u_n \ .$$

3. Comparer $\limsup(u_n + v_n)$ et $\limsup u_n + \limsup v_n$.
4. Montrer que si (u_n) est bornée et (v_n) est convergente, alors $\limsup u_n + v_n = \limsup u_n + \lim v_n$.

4. Soit (E, d) un espaces métrique complet, et soit $f : E \to E$ une application telle que f^p est contractante de rapport $k \in]0, 1[$, pour un certain $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que f a un unique point fixe dans E.

5. Soit $a < b$ deux réels, et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f a au moins un point fixe.

6. Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, et soit $f : E \to F$. Montrer que :

1. si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E, alors f est continue.
2. si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E, alors f est continue.

7. Dire si les espaces métriques suivant sont complets.

1. $\mathbf{Q}$ muni de la distance canonique de $\mathbf{R}$,
2. $\mathbf{R}^2$, muni de la distance euclidienne,
3. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, muni de la distance euclidienne,
4. l'espace des suites dont presque tous les termes sont nuls (tous les termes sauf un nombre fini) muni de la distance l_2.

8. Dans $\mathbf{R}^2$, les distances d_1, d_E et d_∞ sont-elles équivalentes ?

9. Soit E un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2 équivalentes.

1. Montrer que si (E, d_1) est complet, alors (E, d_2) est complet.
2. Montrer que si (E, d_1) est compact, alors (E, d_2) est compact.