L3 MAPES — Topologie
2008-09
Feuille d'exercice no 4

1. Soit E un ensemble muni de deux métriques d et d'.

1. On suppose qu'il existe $c, C > 0$ tels que pour tout $x, y \in E$,

$$cd(x,y) \leq d'(x,y) \leq Cd(x,y) \ .$$

Montrer que d et d' sont équivalentes.

2. Montrer que, plus précisément, cette application identité est uniformément continue et d'inverse uniformément continue.

3. Montrer que la condition de l'énoncé est satisfaite ssi l'identité de (E,d) dans (E,d') est lipschitzienne et son inverse est lipschitzienne.

NB : la notion d'équivalence entre espace métriques définie dans cet exercice est parfois appelée "lipschitz-équivalence".

2. Montrer que les espaces suivants sont connexes par arcs.

1. Le segment $[0,1]$.
2. Le cercle unité dans $\mathbf{R}^2$.
3. Le disque unité dans $\mathbf{R}^2$.

3*. On considère l'ensemble $E \subset \mathbf{R}^2$ constitué de la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, $x \neq 0$, et de l'axe $0y$.

1. E est-il connexe par arcs ?
2. Montrer que E est connexe.

4. Soit (E,N) un EVN, soient $x, y, z \in E$ tels que $x + y + z = 0$. Montrer que

$$N(x-y) + N(y-z) + N(z-x) \geq \frac{3}{2}(N(x) + N(y) + N(z)) \ .$$

5. Soit (E,N) un EVN, soit $A \subset E$ une partie non vide. Pour tout $x \in E$ on pose

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} \ .$$

1. Montrer que pour $x, y \in E$ on a

$$|d(x,A) - d(y,a)| \leq N(y-x) \ .$$

2. Montrer que l'application $d_A : x \mapsto d(x,A)$ est continue.
3. Soit $A \subset E$ non vide, montrer que l'adhérence de A est égale à $d_A^{-1}(0)$.
4. Soit $A, B \subset E$ non vides, montrer que $d_A = d_B$ ssi l'adhérence de A est égale à l'adhérence de B.

6. On considère les fonctions $N_p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définies pour $p \geq 0$ réel comme suit :

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1} x_i^p\right)^{1/p} \ .$$

1. Montrer que N_p est une norme pour tout $p \geq 1$. Qu'en est-il pour $p \in]0,1[$?

2. Montrer explicitement que N_1 et N_2 sont équivalentes, en trouvant des constante optimales c et C telles que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x) \ .$$

3. Même question avec N_1 et N_∞ puis avec N_2 et N_∞.

7. Soit A un sous-ensemble d'un EVN (E, N). Pour $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $a \in E$ on note λA l'image de A par l'homothétie de rapport λ, $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$, et $A + a$ l'image de A par la translation de rapport a.

1. Exprimer en fonction du diamètre de A le diamètre de λA et de $A + a$.
2. Montrer que pour tout $a \in E$ et $r > 0$ on a

$$a + rB_o(0,1) = B_o(a,r) \ .$$

8. Soit E un espace vectoriel, et soient N, N' deux normes sur E. On suppose que N et N' ont les même boules unité. Montrer que $N = N'$.