

**UNIVERSITE PAUL SABATIER**  
**Topologie L3 MAPES, Feuille TD No. 5**

**Exercice 1.** Soient  $E$  un e.v.n. et  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(x) = \frac{x}{\max(1, \|x\|)}$ . Montrer que  $f$  est 2-lipschitzienne.

**Exercice 2.** Soit  $E = \mathbb{R}[x]$  muni de la norme :  $\|\sum_i a_i x^i\| = \sum_i |a_i|$

- i) Est ce que  $\phi : P \mapsto P(x+1)$  est continue?
- ii) Est ce que  $\psi_A : P \mapsto AP$  est continue? ( $A \in E$  fixé)
- iii) Reprendre les questions précédentes avec la norme :  $\|P\| = \sup\{e^{-|t|}|P(t)|, t \in \mathbb{R}\}$

**Exercice 3.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n. et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire.

i) Montrer que  $f$  est continue si et seulement si  $\ker f$  est fermé (pour le réciproque : supposer  $\ker f$  fermé, montrer que  $\{x \mid f(x) > 0\}$  est ouvert, puis étudier  $\{x \mid -1 < f(x) < 1\}$ )

ii) On suppose  $f$  continue. Soit  $x \in E$ . Montrer que  $|f(x)| = \|f\|d(x, \ker f)$

**Exercice 4.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $V$  un s.e.v. de  $H$ . Montrer que :

- i)  $V^\perp$  est fermé
- ii)  $\text{adh}(V) = V^{\perp\perp}$  et  $\text{adh}(V)^\perp = V^\perp$
- iii)  $V$  est dense si et seulement si  $V^\perp = \{0\}$

**Exercice 5.** Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $C$  une partie convexe fermée de  $H$ , et  $Q$  une partie convexe, compacte de  $H$  qui ne rencontre pas  $C$ . Montrons qu'il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement  $C$  et  $Q$

a) Montrer que l'application  $x \rightarrow \|x - p_C(x)\|$  atteint son minimum sur  $Q$ , où  $p_C$  est la projection orthogonale sur  $C$ . On note  $x_0$  un point qui réalise ce minimum

b) M.q.  $\|x_0 - p_C(x_0)\|$  réalise la distance de  $C$  à  $Q$ . En déduire que la projection orthogonale de  $p_C(x_0)$  sur  $Q$  est  $x_0$ .

c) Soit  $l$  la forme linéaire  $y \mapsto \langle y, p_C(x_0) - x_0 \rangle$  et notons  $m = (x_0 + p_C(x_0))/2$ . M.q.  $l(y) < l(m) < l(z)$  pour tout  $y \in Q, z \in C$

d) Conclure.