U.P.S. 2010-2011, L3 Maths Fonda Algèbre, feuille 2
Action de groupe, présentation de groupe

Exercice 1. Décomposer l'ensemble $M_2(\mathbf{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes en orbites pour les opérations suivantes de $GL(2, \mathbf{C})$:

a) multiplication à gauche.

b) conjugaison.

Exercice 2. On considère l'action canonique du groupe de permutations S_n sur l'ensemble $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ (rappeler sa définition).

a) Quelle est l'orbite d'un point ?

b) Montrer que le sous-groupe laissant invariant un point est isomorphe à S_{n-1}.

c) Montrer que le sous-groupe laissant (globalement) invariant un sous-ensemble de cardinal $p < n$ est isomorphe à $S_p \times S_{n-p}$.

d) A quoi est isomorphe le sous-groupe constitué des éléments qui fixent (point par point) un sous-ensemble de cardinal $p < n$?

Exercice 3.

a) Soit G un groupe d'ordre 10. On considère l'action de conjugaison de G sur lui-même. Peut-il admettre une équation des classes de la forme $10 = 1 + 2 + 3 + 4$?

b) Si G est un groupe d'ordre 60, et que son équation des classes (pour l'action de conjugaison de G sur lui-même) est $60 = 1 + 15 + 20 + 12 + 12$, montrer que G est simple, en considérant les équations des classes possibles pour les sous-groupes normaux de G. *(Rappel : H est normal dans G si et seulement si H est réunion de classes de conjugaison.)*

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation des classes pour l'action de conjugaison du groupe sur lui-même.

a) $\mathbf{Q}$, le groupe des quaternions.

b) V, le groupe de Klein.

c) S_3.

d) D_6, le groupe diédral d'ordre 12 (cf feuille 1 exercice 7.b).

Exercice 5. Déterminer les classes de conjugaison du groupe D_4, et en déduire ses sous-groupes normaux.

Exercice 6. Utiliser l'équation des classes afin de déterminer l'ordre des groupes des isométries directes du cube et du tétraèdre. Même question pour les groupes des symétries.

Exercice 7. Interpréter le groupe S_4 comme groupe des isométries directes d'un cube. Déterminer tous ses sous-groupes.

Exercice 8. En utilisant l'équation des classes, calculer l'ordre du groupe G des isométries directes (ici les rotations) du dodécaèdre régulier, noté D. Montrer que G opère transitivement dans l'ensemble des sommets et dans l'ensemble des arêtes de D. En déduire (sans les compter explicitement) le nombre de sommets et d'arêtes de D.

Exercice 9.

a) Montrer que le groupe diédral D_4 des isométries du carré est isomorphe à un sous-groupe de S_4. Quel est le stabilisateur d'un sommet ? D'une arête ?

b) Montrer que D_4 opère sur l'ensemble à deux éléments constitué des deux diagonales du carré. Quel est le stabilisateur d'une diagonale ?

c) L'opération de D_4 sur l'ensemble des diagonales du carré est-elle fidèle ? Et sur l'ensemble des sommets ?

Exercice 10. Soit S une partie d'un groupe G, on note $< S >$ l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S.

a) Démontrer que $< S >$ est un sous-groupe de G contenant S, et que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion). $< S >$ est appelé le sous-groupe de G engendré par S.

b) Soit H l'ensemble des éléments de G qui sont des produits (d'un nombre fini) d'éléments de $S \cup S^{-1}$ (avec S^{-1} = l'ensemble des inverses des éléments de S et, par convention, le "produit d'aucun élément" est le neutre). Démontrer (directement, ou en utilisant a)) que $H =< S >$.

c) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Démontrer que $< f(S) >= f(< S >)$.

Exercice 11. Soit S une partie d'un groupe G et K l'intersection de tous les sous-groupes *distingués* de G contenant S.

a) Démontrer que K est un sous-groupe distingué de G contenant S, et que c'est le plus petit. K est appelé le sous-groupe distingué de G engendré par S.

b) Soit T l'ensemble de tous les conjugués d'éléments de S. Démontrer que $K =< T >$.

Exercice 12. Soit $\mathbf{F}_2$ l'ensemble des expressions de la forme $a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_4}\dots x^{n_k}$ (avec $x = b$ si k pair et $x = a$ si k impair) ou de la forme $b^{n_1}a^{n_2}b^{n_3}a^{n_4}\dots x^{n_k}$ (avec $x = a$ si k pair et $x = b$ si k impair) avec $k \in \mathbf{N}$ et (si $k \neq 0$) $n_1, \dots, n_k$ entiers relatifs non nuls. On munit $\mathbf{F}_2$ de la loi de groupe naturelle (par concaténation de deux expressions, puis simplifications éventuelles).

a) Quel est le neutre ? quel est le symétrique d'une expression ?

b) Montrer que tout groupe engendré par deux éléments est (isomorphe à) un quotient de $\mathbf{F}_2$, et que ceci caractérise le groupe $\mathbf{F}_2$ (à isomorphisme près) parmi les groupes à deux générateurs.

c) $\mathbf{F}_2$ est appelé le groupe libre à deux générateurs a et b, et on peut construire de même pour tout $n \in \mathbf{N}$ le groupe libre $\mathbf{F}_n$ à n générateurs, dont tout groupe engendré par n éléments est quotient. Identifier F_0 et F_1.

Exercice 13. Identifier le groupe de présentation $< a, b; aba^{-1}b^{-1} >$.

Exercice 14. Soit G le groupe de présentation $< r, s; r^n, s^2, (sr)^2 >$, c'est-à-dire le quotient du groupe libre $\mathbf{F}_2$ à deux générateurs a et b par le sous-groupe distingué engendré par $a^n, b^2, (ab)^2$ (on note r, s les images de a, b dans ce quotient G).

a) Vérifier que G est engendré par r et s et que $r^n = s^2 = (sr)^2 = e$ (le neutre de G).

b) Montrer que tout groupe engendré par deux éléments vérifiant ces relations est (isomorphe à) un quotient de G.

c) Combien G a-t-il d'éléments ? Démontrer que G est isomorphe au groupe diédral D_n.

d) Montrer que le groupe de présentation $< x, y; x^2, y^2, (xy)^n >$ est isomorphe à G.

e) Calculer le groupe des automorphismes de D_n.