U.P.S. 2010-2011, L3 Maths Fonda Algèbre, feuille 4
Groupes abéliens de type fini

Exercice 1. Montrer que tout groupe de type fini est au plus dénombrable. Le groupe multiplicatif $\mathbf{Q}_+^*$ est-il de type fini ? et le groupe additif $\mathbf{Q}$?

Exercice 2. Pour tout entier $r > 0$, donner un exemple d'un groupe abélien libre de type fini de rang r et d'un sous-groupe propre de même rang.

Exercice 3. Soit $G = \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a \equiv b \bmod 10\}$. Montrer que G est un sous-groupe de type fini de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, puis trouver un isomorphisme de la forme $\varphi : G \to \mathbf{Z}^r$ pour un r à préciser.

Exercice 4. Un groupe simple est un groupe non trivial dont les seuls sous-groupes distingués sont lui-même et son sous-groupe trivial. Déterminer les groupes abéliens simples.

Exercice 5. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 6. Soient G_1 et G_2 deux groupes finis dont les ordres sont premiers entre eux. Que dire des morphismes de G_1 dans G_2 ? Soient $G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et f un morphisme de G dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Démontrer que la composante de f sur $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ est nulle. A quelle condition f se factorise-t-il par un morphisme de G dans $\mathbf{Z}$?

Exercice 7.

a) Exprimer les groupes suivants comme produits directs de cycliques primaires : $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$.

b) $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ est un groupe d'ordre $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Quel est l'ordre des composantes cycliques primaires que vous trouvez ?

c) Comparer la décomposition de $Z/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ en p-groupes et en p-groupes cycliques.

Exercice 8. Donner la liste complète des groupes abéliens d'ordre 360 (à isomorphisme près), en précisant :

- la décomposition en groupes cycliques primaires (dont les ordres sont appelés les "diviseurs élémentaires" du groupe),
- la suite des "facteurs invariants" (nombres dont chacun divise le suivant et tels que le groupe soit isomorphe au produit des groupes cycliques ayant pour ordres ces nombres).

Exercice 9. Combien existe-t-il de (classes d'isomorphisme de) groupes abéliens d'ordre 900 ?

Exercice 10.

a) Déterminer le nombre de sous-groupes d'ordre 3 de $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

b) Déterminer le nombre de sous-groupes d'ordre 2 de $\mathbf{Z}/60\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 11. Soit G un groupe abélien d'ordre n. Montrer que pour tout diviseur d de n, G possède un sous-groupe d'ordre d.

Exercice 12. Soit G "le" groupe abélien de type $(2, 2^3, 5, 5^2, 5^4, 7^2, 7^3)$ (i.e. dont les diviseurs élémentaires sont ces nombres). Pour chacun des types suivant, dire si G possède un sous-groupe de ce type :

$$(2, 2, 5^2, 7, 7),\ (2, 2^2, 5^2, 5^2, 7^2, 7^3)\ (2^2, 2^2, 5^2, 5^2, 7^2, 7^3)\ (2^3, 5^4, 7^3).$$