Cours de M2 géométrie hyperbolique des surfaces
Feuille d'exercices no 0, 16/11/2010

1 Soit $\xi \in S^1 = \partial_\infty H^2$, soit $x_0 \in H^2$. Pour tout $x \in H^2$, on définit $B_\xi(x_0, x) = \lim_{t\to\infty} d(x, \gamma(t)) - d(x_0, \gamma(t))$, où γ est une géodésique dont l'extremité est en ξ.

Montrer que cette limite existe et est indépendante du choix de γ.

NB On pourra utiliser au choix l'un des modèles de l'espace hyperbolique.

Définition Les *horocycles* sont les ensembles de niveau des fonctions de Busemann. A chaque horocycle est associé un point à l'infini, son "centre".

Définition Un *cercle géodésique* est l'ensemble des points à distance hyperbolique R d'un point donné.

Définition Soit (E, d) un espace métrique, soit (U_n) une suite de sous-ensembles de E, soit $U \subset E$. On dit que U_n converge vers U au sens de la convergence de Hausdorff sur les compacts si pour tout $K \subset E$ compact, $d_H(U_n \cap K, U \cap K) \to 0$, où

$$d_H(U, V) = \max(\sup_{x\in U} d(x, V), \sup_{x\in V} d(x, U)) \ .$$

2 Montrer que les horocycles sont des limites de cercles géodésiques, au sens de la convergence de Hausdorff sur les compacts.

3 Montrer que dans le modèle de l'hyperboloïde, les cercles sont les intersections de H^2 avec les plans affines de type espace.

4 Montrer que dans le modèle de l'hyperboloïde, les horocycles sont les intersections de H^2 avec les plans de type lumière.

5 Montrer que dans le modèle du disque de Poincaré, les cercles géodésiques ont pour image les cercles contenus dans le disque unité ouvert, et les horocycles ont pour image les cercles tangents au bord du disque.

6 Montrer que dans le modèle du demi-espace de Poincaré, les cercles géodésiques ont pour image les cercles contenus dans les demi-espace, et les horocycles ont pour image les cercles tangents au bord et les droites horizontales.

7 Montrer que dans le modèle projectif, les horocycles ont pour image les ellipses de demi-grand axe ϵ, ϵ^2, et qui sont tangentes au bord en une des extrémités de leur petit axe.

8 Montrer que la courbure des horocycle est partout égale à 1.

9 Soit $g_1, g_2 : \mathbf{R} \to H^2$ deux géodésiques paramétrées à vitesse constante. Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & (s,t) & \mapsto & d(g_1(s), g_2(t)) \end{array}$$

est convexe. Comparer avec le cas euclidien.

10 Soit $\theta \in (0, \pi/3)$. Montrer qu'il existe un triangle régulier dont les angles sont égaux à θ, est qu'il est unique aux isométries de H^2 près. Peut-on donner un énoncé analogue pour les polygones réguliers à 4 cotés ?

11 Montrer qu'il existe un analogue du modèle projectif pour S^2, qui envoie un hémisphère sur le plan.

12 Montrer qu'il existe un analogue du modèle du disque de Poincaré pour S^2, qui envoie le complémentaire d'un point sur le plan de manir̂e conforme.

13 1. Soit x, y, a, b, on appelle *birapport* de ces quatre points la quantité :

$$[x, y; a, b] := \frac{(x-a)(y-b)}{(x-b)(y-a)} \ .$$

Montrer que le birapport est invariant sous les transformations projectives de $\mathbf{R}$.

On considère le disque unité D^2. Soit $x, y \in D^2$ distincts, on appelle a, b les intersections de la droite (x, y) avec S^1, et on pose :

$$d_h(x, y) := -\frac{1}{2}\log[x, y; a, b] \ ,$$

et on appelle d_h la *distance de Hilbert* de D^2.

2. Montrer que, pour tout $x \in D^2$, $d_h(0, x) = \operatorname{argtanh}(|x|)$.

3. Montrer que les isométries hyperboliques agissent de manière projective dans le modèle projectif. En déduire que d_h est la distance associée à la métrique hyperbolique dans le modèle projectif.

On remplace maintenant D^2 par un domaine C relativement compact, strictement convexe, de $\mathbf{R}^2$.

4*. Montrer que, si $x, y, z \in D^2$, $d_h(x, y) \leq d_h(x, z) + d_h(y, z)$, avec égalité ssi $z \in [x, y]$.

5. Montrer que la distance d_h ne provient pas d'une métrique riemannienne, sauf si C est un ellipsoïde.