M2 MF, 2010-11 Surfaces hyperbolique
Feuille d'exercices no 2

5 janvier 2011

On a indiqué par une étoile des question un peu plus difficiles.

1. Automorphismes des surfaces.

On considère une surface fermée S de genre $g \geq 2$, munie d'une structure complexe J. On appelle c la structure conforme associée à la structure complexe de S. On rappelle qu'il existe une unique métrique hyperbolique h sur S dont la classe conforme est c. On veut montrer que le cardinal du groupe des automorphismes de (S, J) est borné par une constante qui ne dépend que de g.

1.1 Montrer que S est orientable.

1.2 Montrer que le groupe des automorphismes complexes de (S, J) est isomorphe au groupe des isométries de (S, h) préservant l'orientation. On appellera Γ ce groupe.

1.3 Soit τ une isométrie de H^2 préservant l'orientation, et soit Δ une géodésique de H^2. Montrer que, si τ commute à toutes les translations hyperboliques qui laissent Δ globalement invariante, alors τ est elle-même une translation hyperbolique qui laisse Δ globalement invariante.

1.4* Montrer que Γ est discret, et en déduire que c'est un groupe fini. On pourra admettre le résultat suivant : le groupe des isométries d'une variété riemannienne fermée est un groupe de Lie.

1.5 Soit $\overline{S} := S/\Gamma$ le quotient de l'action de Γ sur S, muni de la métrique induite par h.

a. Montrer que chaque point de $\overline{S}$ a un voisinage qui est isométrique :
- soit à un ouvert de H^2 ;
- soit à un voisinage de x_0 dans un quotient de H^2 par une rotation hyperbolique de centre x_0 et d'angle $2\pi/k$, où $x_0 \in H^2$ et $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$.

Montrer que l'ensemble des points de $\overline{S}$ pour lesquels la seconde situation se produit est fini. On appelle $k_1, \cdots, k_N$ les nombres correspond à ces points, et on pose : $k := \Pi_{i=1}^N k_i$.

b. Montrer que $\overline{S}$ est homéomorphe à une surface fermée orientable. On notera $\overline{g}$ son genre.

1.6 Montrer que chaque point de $\overline{S}$, ayant un voisinage isométrique à un ouvert de H^2, a k images réciproques dans S par la projection canonique.

1.7* Montrer que :

$$4\pi(\overline{g}-1) = \overline{A} - \sum_{i=1}^{N} 2\pi(1-1/k_i) ,$$

où $\overline{A}$ est l'aire de $\overline{S}$. (On pourra supposer l'existence d'une triangulation de $\overline{S}$ dont tous les points "singuliers" sont des sommets.)

1.8* En déduire une majoration du cardinal de Γ par un nombre ne dépendant que de g.

2. Le volume des tétraèdres idéaux.

Dans cette question on considère des "tétraèdres idéaux", c'est à dire des polyèdres hyperboliques ayant 4 sommets, qui sont tous sur la sphère à l'infini. Dans le modèle projectif, ils ont donc comme image l'enveloppe convexe de 4 points sur la sphère unité. On notera s_1, s_2, s_3 et s_4 les sommets. Tous les tétraèdres qu'on considèrera sont non dégénérés, c'est à dire qu'ils ne sont pas contenus dans un plan hyperbolique.

2.1 Montrer que l'espace des tétraèdres idéaux, considérés aux isométries de H^3 près, forme une variété de dimension 2 sur $\mathbf{R}$.

2.2 On considère un tel tétraèdre idéal, et on appelle α, β, γ les angles dièdres des faces qui arrivent en s_1. Montrer que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

2.3 En déduire que, dans un tétraèdre idéal, les arêtes opposées ont le même angle dièdre.

2.4 On suppose dorénavant que la projection orthogonale de s_0 sur le plan défini par s_1, s_2 et s_3 est dans le triangle (s_1, s_2, s_3). Montrer que le tétraèdre (s_0, s_1, s_2, s_3) peut être décomposé en six tétraèdres ayant chacun deux sommets idéaux (et deux sommets non idéaux) et trois angles droits.

2.5* On considère ici un tétraèdre qui n'est pas idéal, ayant des sommets S_1, S_2, S_3, S_4, tels que :

- S_1 et S_2 sont sur la sphère à l'infini, S_3 et S_4 sont dans l'intérieur de H^3 ;
- la géodésique contenant S_1 et S_3 est orthogonale au plan défini par S_2, S_3 et S_4.
- l'angle dièdre de l'arête (S_1, S_4) est égal à $\pi/2$.

On appelle α l'angle dièdre sur l'arête (S_1, S_3).

a. Montrer que l'angle dièdre sur l'arête (S_1, S_2) est $\pi/2-\alpha$, puis que l'angle dièdre sur l'arête (S_2, S_4) est α.

b. Montrer que le volume de ce tétraèdre s'exprime sous la forme :

$$V = \int_T \int_{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{dxdydz}{z^3} ,$$

où T est un triangle euclidien d'angles $(\alpha, \pi/2, \pi/2-\alpha)$, et dont l'arête opposée à l'angle droit est de longueur 1.
Indication : on pourra utiliser le modèle du demi-plan de Poincaré et supposer que S_1 est le point à l'infini, et que le plan défini par S_2, S_3, S_4 est la demi-sphère unité.

c. En déduire que :

$$V = \frac{1}{4}(\Lambda(2\alpha) + 2\Lambda(\pi/2-\alpha)) \ ,$$

où :

$$\Lambda(\theta) := -\int_0^\theta \log|2\sin(u)|du \ .$$

2.6 a. Montrer que Λ est péridiodique de période π et qu'elle est impaire.

b*. Montrer que :

$$\Lambda(2\theta) = 2(\Lambda(\theta) + \Lambda(\theta+\pi/2)) \ .$$

c. En utilisant les questions 2.4 et 2.5, montrer que, si les angles dièdres des arêtes arrivant en s_0 sont α, β et γ, alors le volume de (s_0, s_1, s_2, s_3) est :

$$V = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma) \ .$$

2.7* Etendre ce résultat à tous les simplexes idéaux, en supprimant l'hypothèse faite dans la question 2.4.