M2 MF, 2010-11, Surfaces hyperboliques
Feuille d'exercices no 2

January 5, 2011

1 Courbes de S^2

L'objectif de cette question est de classifier, à homotopie près, les courbes fermées de S^2. Dans toute la question, appelle courbe fermée paramétrée de S^2 une application $f : S^1 \to S^2$ dont la dérivée ne s'annule pas.

On note S^2 la sphère de rayon 1 centrée en 0 dans $\mathbf{R}^3$, et on note p_+ et p_- les points de coordonnées respective $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$. On utilisera aussi sur S^2 le système de coordonnées (θ,ϕ) déterminé par:

$$x = \cos\phi \sin\theta,\ y = \sin\phi\sin\theta,\ z = \cos\theta\ .$$

1.1 Application stéréographique

On définit une application, qu'on notera Φ, de $S^2 \setminus \{p_-\}$ dans $\mathbf{R}^2$, comme suit. Pour $p \in S^2 \setminus \{p_-\}$, $\Phi(p)$ est le projeté orthogonal sur le plan $\{z = 0\}$ de l'intersection avec le plan $\{z = 1\}$ de la droite passant par p_- et par p.

1.1.1 Montrer que Φ définit un difféomorphisme de $S^2 \setminus \{p_-\}$ dans $\mathbf{R}^2$, et calculer les coordonnées de l'image d'un point de coordonnées (θ,ϕ) dans S^2.

1.1.2 Montrer que Φ est **conforme**, c'est à dire qu'il existe une fonction $u : S^2 \setminus \{p_-\} \to \mathbf{R}^2$ (qu'on précisera) telle que, si $f : [0,1] \to S^2 \setminus \{p_-\}$ est une application régulière, alors la longueur de $\Phi \circ f$ est égale à:

$$\int_0^1 (u \circ f)(t)dt\ .$$

1.2 Courbes de $S^2 \setminus \{p_-\}$

On définit une homotopie entre deux courbes $f, g : S^1 \to S^2$ comme une application $H : [0,1] \times S^1 \to S^2$ régulière telle que $\partial H(t,s)/\partial t$ ne s'annule pas, avec $H(0,\cdot) = f$ et $H(1,\cdot) = g$.

1.2.1 Soit f et g deux courbes de $S^2 \setminus \{p_-\}$. Montrer que, si $\Phi \circ f$ et $\Phi \circ g$ sont homotopes dans $\mathbf{R}^2$, alors f et g sont homotopes.

1.2.2 Réciproquement, montrer que, s'il existe une homotopie $H : [0,1] \times S^1 \to S^2$ entre f et g telle que $H([0,1] \times S^1) \not\ni p_-$, alors $\Phi \circ f$ et $\Phi \circ g$ sont homotopes.

1.2.3 En déduire une classification des courbes de $S^2 \setminus \{p_-\}$, modulo les homotopies dont l'image ne contient pas p_-.

1.3 Le passage du pôle sud

1.3.2 Soit f_0 et f_1 les applications continues de $[0, 2\pi]$ dans S^2 définies de la manière suivantes, où on utilise le système de coordonnées (θ, ϕ) de S^2 défini dans l'introduction:

$$\begin{array}{lll} f_0 : & s \mapsto (\pi/2, s) \ , & \\ f_1 : & s \mapsto (\pi/2, s) & \text{pour } s \in [0, \pi] \ , \\ & s \mapsto (\pi/2, 2\pi - s) & \text{pour } s \in [\pi, 2\pi] \ . \end{array}$$

Vérifier que f_0 et f_1 définissent des applications continues de S^1 dans S^2, et montrer qu'il existe une application continue $F : [0, 1] \times S^1 \to S^2$ telle que $F(0, \cdot) = f_0$ et que $F(1, \cdot) = f_1$.

1.3.2 Montrer qu'il existe des courbe g_0 et g_1 dans S^2, C^0 proches de f_0 et de f_1 respectivement, telles que $\Phi \circ g_0$ et $\Phi \circ g_1$ ont pour nombre de rotation respectivement 1 et -1.

1.3.3 Montrer qu'il existe une homotopie dans S^2 entre g_0 et g_1.

1.3.4 Expliquer pourquoi l'image d'une telle homotopie contient nécessairement p_-.

1.3.5 Montrer que, si deux courbes f et g de S^2 sont telles que leur nombre de rotation diffère d'un nombre pair, alors elles sont homotopes.

1.4 Classification des courbes

1.4.1 Soit $H' : [0, 1] \times S^1 \to S^2$ une homotopie dans S^2, telle que $H'(\{0\} \times S^1)$ et $H'(\{1\} \times S^1)$ ne contiennent pas p_-. Montrer qu'il existe alors une homotopie H telle que $H(0, \cdot) = H'(0, \cdot)$, que $H(1, \cdot) = H'(1, \cdot)$, et que p_- a un nombre fini d'images réciproques par H.

1.4.2 Montrer que $H(0, \cdot)$ et $H(1, \cdot)$ ont des nombres de rotation qui diffèrent par un nombre pair.

1.4.3 Donner une classification des courbes fermées de $S^2 \setminus \{p_-\}$, à homotopie dans S^2 près, d'une manière qui fait intervenir le nombre de rotation de leurs images dans $\mathbf{R}^2$ par Φ. Combien y a-t-il de classes d'équivalence ?

1.4.4 En déduire une classification des courbes fermées de S^2 à homotopie près.