M2 MF, 2010-11, Surfaces hyperbolique
Feuille d'exercice no 3

5 janvier 2011

On a indiqué par une étoile des question un peu plus difficiles.

1. Géométrie des surfaces dans $\mathbf{R}^3$ et H^3.

On considère une surface orientée $S \subset \mathbf{R}^3$. En tout point $x \in S$ et pour tout $u, v \in T_xS$ on pose :

$$Bu = -\nabla^0_u N \ , I\!I(u,v) = \langle \nabla^0_u v, N \rangle \ ,$$

où ∇^0 est la connexion de Levi-Cività de $\mathbf{R}^3$, et N est le vecteur normal unitaire orienté à S.

1.1 Montrer que

$$I(Bu, v) = I\!I(u, v) \ ,$$

où I est la métrique induite sur S, et que $I\!I$ est symétrique.

1.2 Montrer que ∇, la connexion de Levi-Cività de la métrique induite de S, vérifie :

$$\nabla^0_u v = \nabla_u v + I\!I(u, v)N \ .$$

1.3 Pour u, v, w trois champs de vecteurs sur S on pose :

$$(\nabla_u I\!I)(v, w) = u.I\!I(v, w) - I\!I(\nabla_u v, w) - I\!I(v, \nabla_u w) \ .$$

Montrer que

$$(\nabla_u I\!I)(v, w) = (\nabla_v I\!I)(u, w) \ .$$

1.4 Montrer que la courbure K de ∇ est égale au déterminant de B.

Indication : on pourra traiter les questions 1.3 et 1.4 ensemble, en utilisant la question 1.2 pour exprimer la courbure de $\mathbf{R}^3$ en termes de ∇ et de $I\!I$.

1.5* On reprend les questions ci-dessus pour une surface $S \subset H^3$. ∇^0 est maintenant la connexion de Levi-Cività de H^3.

1. Montrer que le résultat de la question 1.1 reste valide,
2. de même pour la question 1.2,
3. de même pour la question 1.3.
4. Montrer que le résultat de la question 1.4 reste valide à une petite modification près (qu'on déterminera).

2. Le volume des tétraèdres idéaux.

Dans cette question on considère des “tétraèdres idéaux”, c'est à dire des polyèdres hyperboliques ayant 4 sommets, qui sont tous sur la sphère à l'infini. Dans le modèle projectif, ils ont donc comme image l'enveloppe convexe de 4 points sur la sphère unité. On notera s_0, s_1, s_2 et s_3 les sommets. Tous les tétraèdres qu'on considèrera sont non dégénérés, c'est à dire qu'ils ne sont pas contenus dans un plan hyperbolique.

2.1 Montrer que l'espace des tétraèdres idéaux, considérés aux isométries de H^3 près, forme une surface qu'on pourra décrire. (On pourra utiliser l'action du groupe des isométries de H^3 sur l'ensemble des sommets).

2.2 On considère un tel tétraèdre idéal, et on appelle α, β, γ les angles dièdres des faces qui arrivent en s_1. Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

2.3 En déduire que, dans un tétraèdre idéal, les arêtes opposées ont le même angle dièdre.

2.4 On suppose dorénavant que la projection orthogonale de s_0 sur le plan défini par s_1, s_2 et s_3 est dans le triangle (s_1, s_2, s_3). Montrer que le tétraèdre (s_0, s_1, s_2, s_3) peut être décomposé en six tétraèdres ayant chacun deux sommets idéaux (et deux sommets non idéaux) et trois angles droits.

2.5 On considère ici un tétraèdre qui n'est pas idéal, ayant des sommets S_1, S_2, S_3, S_4, tels que :
- S_1 et S_2 sont sur la sphère à l'infini, S_3 et S_4 sont dans l'intérieur de H^3 ;
- la géodésique contenant S_1 et S_3 est orthogonale au plan défini par S_2, S_3 et S_4.
- l'angle dièdre de l'arête (S_1, S_4) est égal à $\pi/2$.

On appelle α l'angle dièdre sur l'arête (S_1, S_3).

a. Montrer que l'angle dièdre sur l'arête (S_1, S_2) est $\pi/2 - \alpha$, puis que l'angle dièdre sur l'arête (S_2, S_4) est α.

b*. Montrer que le volume de ce tétraèdre s'exprime sous la forme :

$$V = \int_T \int_{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{dxdydz}{z^3} ,$$

où T est un triangle euclidien d'angles $(\alpha, \pi/2, \pi/2 - \alpha)$, et dont l'arête opposée à l'angle droit est de longueur 1.

Indication : on pourra utiliser le modèle du demi-plan de Poincaré et supposer que S_1 est le point à l'infini, et que le plan défini par S_2, S_3, S_4 est la demi-sphère unité.

c*. En déduire que le volume hyperbolique de ce tétraèdre est :

$$V = \frac{1}{4}(\Lambda(2\alpha) + 2\Lambda(\pi/2 - \alpha)) ,$$

où :

$$\Lambda(\theta) := -\int_0^\theta \log|2\sin(u)|du .$$

2.6 a. Montrer que Λ est impaire. On admettra qu'elle est périodique de période π.

b. Montrer que :

$$\Lambda(2\theta) = 2(\Lambda(\theta) + \Lambda(\theta + \pi/2)) \ .$$

c*. En utilisant les questions 2.4 et 2.5, montrer que, si les angles dièdres des arêtes arrivant en s_0 sont α, β et γ, alors le volume de (s_0, s_1, s_2, s_3) est :

$$V = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma) \ .$$

Indication. On pourra remarquer que la projection orthogonale de s_0 sur le plan $z = 0$ est au centre du cercle contenant s_1, s_2 et s_3. On rappelle aussi qu'une corde d'un cercle est vue depuis le centre sous un angle double de celui sous lequel elle est vue depuis un point du cercle qui est du même coté de la corde que le centre.