

Surfaces hyperboliques  
Cours du M2R Mathématiques fondamentales, 2010-11

Jean-Marc Schlenker<sup>1</sup>

Oct 2010 (v0)

1. Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR CNRS 5219, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex 9, France. [schlenker@math.univ-toulouse.fr](mailto:schlenker@math.univ-toulouse.fr); <http://math.univ-toulouse.fr/~schlenker>.



# Table des matières

0.1	Bibliographie . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Géométrie riemannienne</b>	<b>9</b>
1.1	Métriques riemanniennes . . . . .	9
1.2	Forme d'aire . . . . .	9
1.3	Crochet de Lie . . . . .	10
1.4	Connexion, courbure . . . . .	10
1.5	Géodésiques, champs de Jacobi . . . . .	11
1.6	Le théorème de Gauss-Bonnet polygonal . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Topologie des surfaces</b>	<b>15</b>
2.1	Groupe fondamental des surfaces . . . . .	15
2.2	Revêtement universel . . . . .	15
2.3	Groupe fondamental et géodésiques . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Les métriques euclidiennes sur le tore</b>	<b>19</b>
3.1	Métriques plates sur le tore . . . . .	19
3.2	L'espace des métriques plates . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Géométrie du plan hyperbolique</b>	<b>21</b>
4.1	Le plan hyperbolique comme quadrique . . . . .	21
4.2	Le modèle projectif . . . . .	22
4.3	Le disque de Poincaré . . . . .	22
4.4	Le demi-plan de Poincaré . . . . .	23
4.5	Comportements des géodésiques . . . . .	25
4.6	Le bord à l'infini . . . . .	25
4.7	Horocycles . . . . .	26
4.8	Géométrie du triangle . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Surfaces hyperboliques</b>	<b>29</b>
5.1	Les surfaces . . . . .	29
5.2	La formule de Gauss-Bonnet, le retour . . . . .	30
5.3	Polygones à angles droit . . . . .	31
5.4	Pantalons . . . . .	31
5.5	Découpage des surfaces en pantalons . . . . .	32
5.6	L'espace de Teichmüller vu par les pantalons . . . . .	33
5.7	Les surfaces hyperboliques comme quotient . . . . .	34
5.8	Structures conformes sur les surfaces . . . . .	34
5.9	Un théorème d'uniformisation . . . . .	35
5.10	Retour sur l'espace de Teichmüller . . . . .	38

<b>6</b>	<b>L'espace hyperbolique</b>	<b>39</b>
6.1	Les principaux modèles . . . . .	39
6.2	Les isométries comme transformations projectives complexes . . . . .	41
6.3	Plans géodésiques . . . . .	42
6.4	Fonctions de Busemann, horosphères . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Introduction aux variétés hyperboliques de dimension 3</b>	<b>45</b>
7.1	Propriétés de base . . . . .	45
7.2	Comment construire des variétés hyperboliques fermées . . . . .	45
7.3	Conditions topologiques, la conjecture d'hyperbolisation . . . . .	46
7.4	Les principaux énoncés . . . . .	47
7.5	Variétés convexe co-compactes . . . . .	47

# Introduction

## La géométrie hyperbolique dans l'histoire

**Une motivation : l'axiome des parallèles** Dans ses "Eléments", Euclide utilise un axiome qui peut se formuler sous différentes formes, par exemple :

La somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ .

Dès la renaissance, la question se pose de savoir si cet axiome est vraiment nécessaire.

**La découverte de la géométrie hyperbolique** Par Bolyai et Lobatchevsky, indépendamment, un peu avant 1850. Elle vérifie tous les axiomes d'Euclide, sauf l'axiome des parallèles : la somme des angles d'un triangle est inférieure à  $\pi$ .

**Quelques aspects de la géométrie hyperbolique** Dès sa découverte, des mathématiciens développent certains aspects riches et subtils de la géométrie hyperbolique, par exemple la théorie des polyèdres (Schläfli, etc).

**Qu'est-ce que le plan hyperbolique ?** C'est une surface difféomorphe au plan (ou à un disque), munie d'une *métrique*, c'est à dire d'une manière de mesurer la longueur des courbes. Il y a des *droites* — qui minimisent la distance entre leurs points. Mais la géométrie est plus riche que dans le plan euclidien. On a un *bord à l'infini*, équivalent à la droite projective réelle, et d'autres structures (par exemple les *horocycles*).

## Les multiples faces des surfaces hyperboliques

Les surfaces hyperboliques sont à l'intersection de plusieurs mondes :

- la géométrie riemannienne,
- les espaces symétriques,
- les courbes algébriques,
- l'arithmétique (forme modulaires, etc).

**Géométrie hyperbolique et espaces symétriques.** Relié aux groupes de Lie, etc.

Intervient dans le cours, en particulier dans la preuve de rigidité de Calabi-Weil.

**Géométrie hyperbolique et géométrie riemannienne.** Cas particulier des variétés d'Einstein, toutes en dim 2 et 3.

La preuve par Perelman (et Hamilton, etc) de la conjecture de géométrisation de Thurston montre qu'il est fécond de penser la géométrie hyperbolique en termes riemanniens. Aspect dominant ici dans le début du cours.

## Surfaces hyperboliques et théorie de Teichmüller

**Les surfaces** Ce sont des variétés de dimension 2, pour lesquelles chaque point "ressemble localement à  $\mathbf{R}^2$ ".

**Les surfaces hyperboliques** Ce sont des surfaces munies d'une métrique — une manière de mesurer la longueur des courbes — qui est localement isométrique au plan hyperbolique. On peut comprendre à quoi ressemble l'ensemble des surfaces hyperboliques, c'est la *théorie de Teichmüller*.

**Liens avec les surfaces de Riemann** Ce sont des surfaces, munies d'une structure complexe. A chaque surface de Riemann, on associe uniquement une surface hyperbolique, et réciproquement.

**La théorie de Teichmüller.** C'est l'étude des surfaces de Riemann de topologie donnée.

**Liens avec la théorie des nombres** Les *forme modulaires*, qui "vivent" sur des surfaces hyperboliques, jouent un rôle fondamental dans la théorie des nombres, c.f. la preuve du théorème de Fermat par Wiles.

**Le théorème d'uniformisation de Poincaré** Les surfaces fermées (compactes sans bord) sont classifiées à déformation près. Quand elles sont orientables, elles sont classifiées par leur "genre". Poincaré a montré que chaque surface admet une métrique localement sphérique (pour la sphère), euclidienne (pour le tore) ou hyperbolique (pour toutes les autres). Il n'y a pas unicité, pour les métriques hyperboliques.

**Décompositions en pantalon.**

**Les coordonnées de Fenchel-Nielsen**

## L'espace hyperbolique de dimension 3

- Analogie hyperbolique de l'espace euclidien de dimension 3. Mais un certain nombre de spécificités :
- le bord à l'infini,
  - les horosphères,
  - le groupe des isométries est  $PSL(2, C)$ , qui est intéressant.

## Les variétés hyperboliques de dimension 3

**Les variétés hyperboliques de dimension 3.** Elles sont beaucoup plus délicates à comprendre que les surfaces hyperboliques. On donnera deux méthodes pour construire de telles variétés, et des conditions sous lesquelles une variété de dimension 3 ne peut pas admettre de métrique hyperbolique.

**La conjecture de géométrisation de Thurston.** En particulier, hyperbolisation.

**Le théorème de rigidité de Calabi-Weil.**

**Le théorème de rigidité de Mostow.**

**Géométrie hyperbolique et cosmologie** L'univers est-il une variété hyperbolique, plate ou sphérique? C'est une question que les cosmologues se posent très sérieusement...

## Les variétés quasi-fuchsiennes

**Définition.**

**Aspect intéressant : le coeur convexe et sa géométrie.**

**Laminations mesurées de plissage.**

**Relations avec la théorie de Teichmüller.**

**Relations avec la gravité quantique.**

## 0.1 Bibliographie

Géométrie riemannienne : [GHL04].

Groupe fondamental, etc : [Mas77].

Décompositions en pantalon, Fenchel-Nielsen : [BP92].





# Chapitre 1

## Géométrie riemannienne

**Motivations :** Rappels de géométrie euclidienne. Métriques riemanniennes, etc. Rappels de topologie des surfaces, groupe fondamental, revêtement universel. Comprendre l'espace des métriques plates sur le tore et son groupe fondamental.

### 1.1 Métriques riemanniennes

**Espace tangent à une surface.**

**Définition :** produit scalaire sur les espaces tangents.

**Exemple :** le plan euclidien.

**Longueurs des courbes.**

**Pull-back et push-forward des métriques riemanniennes.**

**Isométries entre surfaces.**

**Définition :** une surface munie d'une métrique riemannienne est localement euclidienne (ou plate) si chaque point a un voisinage isométrique à un ouvert du plan euclidien.

### 1.2 Forme d'aire

**Rappel** Orientation d'une surface par choix d'une classe d'équivalence de  $n$ -formes partout non nulles, mod multiplication par une fonction.

**Définition.** La forme d'aire  $da_g$  associée à une métrique riemannienne et à une orientation. Pour deux vecteurs  $u, v \in T_x S$ , on choisit une BON orientée  $(e_1, e_2)$  de  $T_x S$  puis on définit  $da_g(u, v)$  comme la matrice des coordonnées de  $u, v$  par rapport à  $e_1, e_2$ . Indépendant de la base choisie.

**Application.** Permet de définir l'aire d'un domaine  $\Omega \subset S$  : on se donne une paramétrisation  $\phi : D \rightarrow \Omega$  avec  $D \subset \mathbf{R}^2$ , puis on déf

$$A_g(\Omega) := \int_D da_g(d\phi(\partial_x), d\phi(\partial_y)) dx dy .$$

On vérifie que ça ne dépend pas du choix de  $D$  et de  $\phi$  (formule de changement de variable dans une intégrale).

**Def.** Une surface est orientable si elle admet une forme d'aire (en ce sens).

### 1.3 Crochet de Lie

**Définition** Action des champs de vecteurs par dérivation sur les fonctions régulières.

**Définition** Soit  $(x_1, x_2)$  un système de coordonnées local sur une surface, alors  $\partial_{x_i}$  est le champs de vecteur  $\partial/\partial x_i$ .

**Lemme** Soient  $x, y$  deux champs de vecteurs sur une surface  $S$ . Pour tout  $s \in S$ , il existe  $z$  tel que pour toute fonction  $f : S \rightarrow \mathbf{R}$  régulière,  $x.(y.f) - y.(x.f) = z.f$ .

**Rappel** Si  $\omega$  est une 1-forme et  $x, y$  sont deux champs de vecteurs alors

$$d\omega(x, y) = x.\omega(y) - y.\omega(x) - \omega([x, y]) .$$

**Définition** On note  $[x, y]$  ce champ de vecteurs, c'est le crochet de Lie de  $x$  et  $y$ .

**Propriété** Le crochet de Lie est invariant par difféomorphisme.

**Exemple** Soit  $(x_1, x_2)$  un système de coordonnées local. Alors  $[\partial_{x_1}, \partial_{x_2}] = 0$ .

**NB** Réciproque : si deux champs de vecteurs sont transverses et leur crochet de Lie est nul, alors ils sont obtenus de cette manière.

**Preuve** On définit des 1-formes  $a, b$  qui valent 1 sur  $X$  et 0 sur  $Y$  (resp. l'opposé) puis on montre qu'elles sont fermées parce que le crochet de  $X, Y$  est nul.  $\square$

### 1.4 Connexion, courbure

**Définition.** Une connexion sur un fibré  $E$  sur  $S$  est un opérateur  $D$  qui à chaque section  $s$  de  $E$  associe un morphisme de fibré de  $TS$  dans  $E$ ,  $Ds : TS \rightarrow E$ , tel que  $D_x(s+r) = D_x s + D_x r$  et que  $D_x(fs) = f D_x s + df(x)s$ .

**Connexion de Levi-Civita d'une surface.** C'est une connexion définie sur le fibré tangent, caractérisée par deux propriétés :

- sans torsion :  $\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$ ,
- compatible avec la métrique :  $x.g(y, z) = g(\nabla_x y, z) + g(y, \nabla_x z)$ .

**Propriétés.** Etant donné  $(S, g)$ , il existe une unique connexion avec ces propriétés.

Preuve : on utilise la formule :

$$2g(\nabla_x y, z) = x.g(y, z) + y.g(x, z) - z.g(x, y) + g([x, y], z) + g([z, x], y) + g([z, y], x) .$$

$\square$

**Courbure.** On définit l'opérateur de courbure comme :

$$R_{x,y}z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z .$$

**Proposition.** C'est un opérateur d'ordre 0 en  $z$  (ne dépend que de la valeur de  $z$  en un point, pas de ses dérivées).

Preuve : si  $z$  remplacé par  $fz$  alors le résultat ne varie que par multiplication par  $z$  (les termes en  $df$  disparaissent). Donc si  $z = \sum z_i e_i$  alors ne dépend que de la valeur des  $z_i$  pas de leurs dérivées.  $\square$

**Propriété.**  $R_{x,y}z$  est antisymétrique en  $x, y$ . De plus,  $R_{x,y} : TS \rightarrow TS$  est antisymétrique.

Preuve : premier point évident, pour le second on fait passer les  $\nabla$  de droite à gauche...  $\square$

**Définition.** La courbure  $K$  de  $(S, g)$  est définie par :

$$g(R_{x,y}z, t) = -K da(x, y) da(z, t) .$$

## 1.5 Géodésiques, champs de Jacobi

**Définition** Structure complexe associée à une métrique riemannienne sur une surface orientée.

**NB** C'est bien une structure complexe. On admet ce point ici, en fait on définit une structure complexe comme la donnée de  $J : TS \rightarrow TS$  telle que  $J^2 = -I$ .

**Courbes paramétrées sur une surface.** Vecteur tangent unitaire  $t$ , vecteur normal unitaire  $n$  pour une surface orientée, courbure géodésique  $\langle \nabla_t t, n \rangle$ . Version vectorielle  $\nabla_t t$ .

**Géodésiques.** Définition : courbes dont la courbure géodésique est nulle. Parfois considérées comme des courbes paramétrées, on considère alors des courbes paramétrées à vitesse constante (souvent 1).

**Propriétés (outline) :**

- les géodésiques sont des points critiques de la distance entre deux de leurs points (pas nécessairement un minimum),
- par tout  $(x, v) \in TS$  il passe une unique géodésique (paramétrée à vitesse constante).

**Définition.** Une géodésique sur  $(S, g)$  est une courbe paramétrée  $\gamma : [0, L] \rightarrow S$  telle que  $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$  pour tout  $t$ . On parle aussi de géodésique pour l'image  $\gamma([0, L])$ .

**NB** : l'expression  $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)$  a bien un sens car on peut étendre  $\gamma'(t)$  en un champ de vecteurs sur  $S$ , puis on remarque que l'expression ne dépend pas du prolongement choisi car on dérive dans la direction de  $\gamma$ .

**NB** Pour une paramétrisation quelconque,  $\nabla_{\gamma'} t = kJ\gamma'$ , où  $t$  est le vecteur tangent unitaire à la courbe.

**Lemme** (Variation première de la longueur) Soit  $\gamma_t : [0, L] \rightarrow S$  une famille de courbes,  $\gamma_0$  paramétrée à vitesse 1, dont les extrémités sont fixes. Alors

$$\partial_t L(\gamma_t)|_{t=0} = - \int_0^L \langle \partial_t \gamma, J\gamma' \rangle ds .$$

**Preuve** Intégration par partie, def de la courbure géodésique, etc.  $\square$

**Corollaire** Les géodésiques sont les points critiques de la longueur par rapport aux variations qui fixent les extrémités, parmi les géodésiques non paramétrées.

**Définition** Energie d'une courbe.

**Lemme** Les géodésiques paramétrées à vitesse constante sont les points critiques de l'énergie par rapport aux variations qui fixent les extrémités.

**Théorème** Existence de géodésiques en temps petit. Dans  $(S, g)$ , pour tout  $(x_0, u_0)$  il existe  $U \in TS$  voisinage de  $(x_0, u_0)$  et  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $(u, v) \in U$  il existe une géodésique définie sur  $(-\epsilon, \epsilon)$  telle que  $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = u$ .

**Lemme** (Admis) Existence de solutions aux EDO. Soit  $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  régulière, soit  $(x, 0, u_0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ,  $\exists U, V$  voisinages et  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $(x, u) \in U$  il existe une solution de  $x'' = F(x, x')$  définie sur  $(-\epsilon, \epsilon)$  telle que  $x(0) = x_0$  et  $x'(0) = u_0$ . De plus l'application définie par le flot est régulière.

**Preuve du thm.** Suit de ce lemme, traduit dans le fibré tangent.  $\square$

**Propriété.** Equation différentielle satisfaite par les champs de Jacobi le long des géodésiques : si  $Y = x(t)\gamma'(t) + y(t)n(t)$  alors  $x(t)$  est affine et  $y(t)$  est solution de :  $y''(t) + Ky(t) = 0$ .

**L'application exponentielle.**

**Existence de petites géodésiques.** On va montrer que, pour  $x \in S$  fixé, tout  $y \in S$  assez proche de  $x$  est joint à  $x$  par une géodésique.

**Lemme.** Soit  $x \in S$ , alors  $\exp_x : T_x S \rightarrow S$  est un difféomorphisme (local) au voisinage de 0.

Preuve : sa différentielle est  $Id$  puis théorème d'inversion locale.

**Def.** L'application exponentielle  $\exp : TS \rightarrow S$  est définie par  $\exp(x, v) = \exp_x(v)$ .

**Lemme (généralisation).** Soit  $x \in S$ , alors  $(\pi_1, \exp)$  est un difféo local au voisinage de  $(x, 0)$ .

Preuve : pareil, on considère maintenant  $d(\pi_1, \exp) : T_x S \times T_x S \rightarrow T(S \times S)$  et on montre que c'est  $(u, v) \mapsto (u, u + v)$ .

## 1.6 Le théorème de Gauss-Bonnet polygonal

**Lemme** Gauss-Bonnet pour les disques à bord régulier et les anneaux.

**Preuve** On le montre d'abord pour un anneau, en prenant un repère mobile dont le premier vecteur est parallèle au bord. On définit la 1-forme de connexion du repère, puis la 2-forme de courbure, et on montre que  $d\omega = \Omega$ .

Puis on approche un disque par une suite d'anneaux dont un bord converge vers un point, et on obtient la version pour les disques.  $\square$

**Polygones géodésiques.** On considère des polygones dont l'intérieur est homéomorphe à un disque.

**Angles extérieurs des polygones.**

**Courbure géodésique des courbes.**

**Les angles extérieurs comme la limite de la courbure géodésique.**

**Thm (Gauss, Bonnet).** La somme des angles extérieurs d'un polygone géodésique est  $2\pi$  moins l'intégrale de la courbure à l'intérieur.

Preuve : ça découle de la version à bord régulier avec la courbure totale du bord.

Pour montrer la formule avec courbure totale du bord, on enlève un petit disque et on considère un feuilletage par des courbes, puis le champ de vecteur unitaire tangent aux courbes, puis la forme de connexion de ce champ, sa différentielle extérieure est  $\pm Kda$ , sa valeur au bord est  $2\pi$  (pour le petit disque) moins la courbure de la courbe extérieure.

## Exercices

**1. Crochet de Lie.** Soit  $(S, g)$  une métrique munie d'une métrique riemannienne.

1. Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions régulières sur  $S$ . Soient  $Dx$  et  $Dy$  les gradients de  $x$  et  $y$  (i.e.  $dx = g(Dx, \cdot)$  et de même pour  $y$ ). Montrer que  $[Dx, Dy] = 0$ .
2. Soit  $\phi : S \rightarrow S'$  un difféomorphisme, et soient  $u$  et  $v$  deux champs de vecteurs sur  $S$ . Montrer que  $[d\phi(u), d\phi(v)] = d\phi([u, v])$ .
3. Soient  $u, v$  deux champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}^3$  tels que  $[u, v] = 0$  et que  $u$  et  $v$  sont linéairement indépendants en chaque point. Montrer qu'il passe par chaque point de  $\mathbf{R}^3$  une surface tangente à  $u$  et  $v$  en chaque point.

**2. Géométrie du plan euclidien.** Soient  $x = (1, 0)$  et  $y = (0, 1)$ , considérés comme des champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}^2$ , muni de sa métrique canonique.

1. Montrer que  $[x, y] = 0$ , puis calculer  $\nabla_x y$  et  $\nabla_y x$ .
2. En déduire la courbure de  $\mathbf{R}^2$ .

**3. Géométrie de la sphère.** On considère la sphère  $S^2 \subset \mathbf{R}^3$  avec sa métrique canonique. On utilise les coordonnées sphériques usuelle :  $\phi$  est la distance orientée à l'équateur,  $\theta$  la projection sur l'équateur. On pose  $X = \partial_\theta$ ,  $Y = \partial_\phi$ .

1. Calculer la métrique  $g$  dans la base  $(X, Y)$ , montrer que  $g$  s'écrit sous la forme :  $g = \cos^2(\phi)d\theta^2 + d\phi^2$ .
2. Calculer  $\nabla_X X, \nabla_X Y, \nabla_Y X, \nabla_Y Y$ .
3. En déduire  $K$ .
4. On considère la métrique  $\cosh^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2$ . Reprendre les calculs précédents et montrer que sa courbure est  $-1$ .



# Chapitre 2

## Topologie des surfaces

### 2.1 Groupe fondamental des surfaces

**Objectif :** associer à chaque surface (plus tard à chaque variété) un objet algébrique, ici un groupe, qui “code” la topologie de la surface, c’est à dire sa classe d’équivalence modulo déformations.

**Courbes, courbes fermées, homotopies entre courbes.**

**Def :** surface simplement connexe : toute courbe fermée est homotope à une courbe constante.

**Le groupe des courbes issues d’un point.**

**Définition du groupe fondamental.**

**Indépendance par rapport au point base.**

**Exemple de surface :** le tore, vu comme surface dans  $\mathbf{R}^3$  et comme recollement d’un rectangle.

**Exemple :** le groupe fondamental du tore est  $\mathbf{Z}^2$ . Preuve en intégrant deux 1-formes,  $dx$  et  $dy$ , sur le carré unité. Relevé des chemins à  $\mathbf{R}^2$  par l’intégration de ces formes. Deux chemins sont homotopes lorsque les nombres correspondants sont identiques, car déformation possible vers un segment paramétré à vitesse constante.

**Surfaces orientables :** celles qui admettent une forme volume non triviale.

**Exemple.** Le disque privé d’un point, son groupe fondamental est  $\mathbf{Z}$ .

**Exemple.** Le disque privé de deux points, son groupe fondamental est le groupe libre sur deux générateurs. (Extension possible au disque privé de  $n$  points.)

### 2.2 Revêtement universel

**Revêtements.** Une application  $u : \bar{S} \rightarrow S$  telle que, pour tout  $x \in S$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $u^{-1}(U) \subset \bar{S}$  est une réunion disjointe d’ouverts  $U_i$  tels que, pour chaque  $i$ , la restriction de  $u$  à  $U_i$  est un homéomorphisme de  $U_i$  sur  $U$ .

**Propriété (admise ici).** Un homéomorphisme local propre est un revêtement.

**Définition :** soit  $S$  une surface (fermée).  $\tilde{S}$  est l'espace des couples  $(x, [\gamma])$  où  $x \in S$  et  $[\gamma]$  est une classe d'homotopie de chemins joignant  $x_0$  à  $x$ .

**Propriétés.**

1. il existe une projection canonique  $p_0 : \tilde{S} \rightarrow S$ ,
2.  $\tilde{S}$  est simplement connexe,
3.  $\pi_1(S)$  a une action naturelle sur  $\tilde{S}$ ,
4.  $\tilde{S}/\pi_1(S)$  est difféomorphe à  $S$ .

Preuve :

(1) on se donne  $(x_t, \gamma_t)$  avec  $0 \leq t \leq 1$  et  $(x_1, \gamma_1) = (x_0, \gamma_0)$ , on déforme les chemins pour se ramener à  $\gamma_0$  composé avec chemin parcouru par  $(x_t)$  et on utilise hyp que même classe homotopie à l'arrivée pour déformer sur un chemin constant.

(2) on fixe  $x$  et on fait agir  $\pi_1(S)$  sur  $[\gamma]$ .

(3)  $(x, [\gamma])$  est dans l'orbite de  $(x', [\gamma'])$  ssi  $x = x'$ . □

**Propriété universelle.** Soit  $S$  une surface connexe, soit  $u : \bar{S} \rightarrow S$  un revêtement par une surface connexe. Alors il existe un revêtement  $v : \tilde{S} \rightarrow \bar{S}$  tel que  $u \circ v = p_0$ .

**Remarque.** Si  $S$  est simplement connexe son revêtement universel est  $S$ .

**Def :** relevé à  $\tilde{S}$  d'une métrique  $g$  sur  $S$ .

**Propriétés.** Si  $S$  est fermée alors  $(\tilde{S}, g)$  est complète.  $\pi_1(S)$  agit par isométries sur  $\tilde{S}$ .

**Cor.** De même,  $\pi_1(S)$  agit sur tous les revêtements de  $S$ . La métrique  $g$  se relève en une métrique sur chacun de ces relevés, et l'action de  $\pi_1(S)$  est par isométries.

## 2.3 Groupe fondamental et géodésiques

**Géodésiques minimisantes.**

**Thm.** Dans une surface fermée (compacte sans bord) toute classe d'homotopie non triviale est réalisée par une géodésique fermée.

Preuve : on la réalise par une courbe régulière puis par une géodésique par morceaux. Puis on minimise la longueur parmi les géodésiques par morceaux.

**Thm.** Supposons que  $(S, g)$  est à courbure  $K < 0$ . Alors chaque classe d'homotopie est réalisée par au plus une géodésique.

Preuve : on suppose qu'il existe deux géodésiques, alors soit intersection soit pas. Si intersection, biface, impossible par Gauss-Bonnet. Si pas d'intersection, anneau à bord géodésique, or on voit en le décomposant en polygones (disques) que l'intégrale de la courbure dans l'anneau doit être nulle, impossible.

**NB :** montre aussi que vrai pour une surface à courbure  $K \leq 0$  sauf qu'il peut y avoir des anneaux et alors  $K = 0$  dans chaque anneau.

## Exercices

**1. Caractéristique d'Euler.** Soit  $S$  une surface à bord, munie d'une triangulation. On définit  $\xi(S)$  comme  $v - a + f$ , où  $v$  est le nombre de sommets,  $a$  le nombre d'arêtes,  $f$  le nombre de faces. Montrer que  $\xi(S)$  ne dépend pas de la triangulation choisie.

Montrer que  $\xi(D^2) = 1$ ,  $\xi(S^2) = 2$ ,  $\xi(S^1 \times [0, 1]) = 0$ ,  $\xi(T^2) = 0$ .



**2. Théorème de Gauss-Bonnet pour les surfaces à bord.** On se donne une surface à bord  $S$  avec une métrique riemannienne  $g$  telle que le bord soit géodésique par morceaux. Montrer que la formule de Gauss-Bonnet s'étend sous la forme :

$$\int_S K da = 2\pi\xi(S) - \sum_i \theta_i .$$



## Chapitre 3

# Les métriques euclidiennes sur le tore

### 3.1 Métriques plates sur le tore

**Def.** Métriques localement euclidiennes sur  $T^2$ .

**NB.** Les deux notions de “plat” et de “localement euclidien” sont identiques. Preuve par l’application exponentielle.

**Lemme.** La seule surface plate simplement connexe complète est le plan euclidien.

Preuve : on choisit  $x_0 \in S$  et on considère l’application exponentielle  $\exp_{x_0} : T_{x_0}S \rightarrow S$ . On remarque (en utilisant les propriétés des champs de Jacobi) que c’est un homéo local et qu’elle est propre. C’est donc un revêtement. Mais  $S$  est simplement connexe donc ce revêtement est trivial, c’est un homéo global et donc une isométrie globale.

**Cor.** Toute métrique plate sur le tore est le quotient du plan euclidien par  $\mathbf{Z}^2$ .

**Lemme.** Soit  $g$  une métrique plate sur  $T^2$ . L’action correspondante de  $\mathbf{Z}^2$  sur  $\mathbf{R}^2$  est par translations.

Preuve : on considère les géodésiques fermées correspondant à deux générateurs du  $\pi_1$ .

**CAD** A chaque métrique plate sur le tore on associe deux vecteurs dans  $\mathbf{R}^2$ , définis modulo rotation (des deux par le même angle). Soit  $u, v$ .

### 3.2 L’espace des métriques plates

**Difféomorphismes, isotopies.** Def des isotopies, déformables sur l’identité à travers des difféos. Dans les deux cas, forment un groupe.

**Actions.** Le groupe des difféos et le groupe des isotopies agissent sur l’espace des métriques (riemanniennes resp. plates etc) sur une surface.

**Quotient par les isotopies.** Les deux vecteurs  $u, v$  ne changent pas sous une isotopie (sauf rotation). Ils définissent uniquement la métrique.

**Quotient par les difféos.** Sous un difféomorphisme,  $u, v$  sont envoyés sur  $au + bv, cu + dv$ , où  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$  et le déterminant de la matrice qu’ils forment est  $\pm 1$ . (C’est 1 ssi l’orientation est préservée, cf orientation à un point d’intersection).

Preuve : le réseau qu’ils forment,  $u\mathbf{Z} + v\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}^2$ , reste le même.

**Twists de Dehn.** Comment déformer une métrique plate sur le tore? On peut faire un twist de Dehn fractionnaire. Si on atteint un angle  $2\pi$  on est revenu à la même métrique à difféo (non trivial) près.

**Exercice.** Les twists de Dehn fractionnaires permettent de passer de n'importe quelle métrique à n'importe quelle autre.

**Homothéties.** Etant donné une métrique  $g_1$ , on considère toutes les métriques homothétiques  $g_t, t > 0$ , comme équivalentes.

**Cor.** L'espace des métriques plates sur le tore, à isotopie près, est le demi-plan supérieur  $H$ .

**Métrique.** Cet espace est muni naturellement d'une métrique riemannienne :  $(dx^2 + dy^2)/y^2$ .

Explication : il faut quotienter par l'aire pour avoir une métrique naturelle sur l'espace des couples de vecteurs, qui soit invariante par homothétie, et par rotation de  $u$  et de  $v$ , d'où :

$$\frac{\|u'\|^2 + \|v'\|^2}{\|u \times v\|}.$$

Or l'aire est simplement  $y$  quand  $u = (1, 0)$ .

**NB :** cette métrique est *conforme* à la métrique euclidienne (les angles sont les mêmes dans les deux métriques).

**Isométries.** Action de  $SL(2, \mathbf{Z})$  est par isométries.

**Lemme.** Plus généralement, l'action naturelle de  $SL(2, \mathbf{R})$  sur le demi-plan supérieur est isométrique pour cette métrique naturelle.

Preuve : calcul direct, en prenant  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ .

**Le quotient.**  $H/SL(2)$ , l'espace des métriques plates sur le tore modulo isométries.

**Métrique naturelle.**

## Exercices

1. On considère l'espace des métriques plates sur le tore, modulo isotopie (le demi-plan supérieur) avec sa métrique naturelle.

1. Montrer que cet espace est complet (toute courbe qui sort de tout compact est de longueur infinie).
2. Montrer que les géodésiques sont les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe réel.
3. Calculer la courbure.

# Chapitre 4

## Géométrie du plan hyperbolique

### Motivations

Objectifs du chapitre :

1. Comprendre la définition du plan hyperbolique.
2. Maîtriser les différents modèles qui permettent de le comprendre heuristiquement.
3. Maîtriser ses propriétés élémentaires, par exemple la géométrie des triangles hyperboliques.
4. Notion de bord à l'infini, d'horocycle, de fonction de Busemann.

### 4.1 Le plan hyperbolique comme quadrique

**L'espace de Minkowski**  $\mathbb{C}$  est un espace qui joue un rôle fondamental dans la relativité restreinte.

**Définition**  $\mathbf{R}_1^3$  est  $\mathbf{R}^3$  muni de la métrique :

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 .$$

**Définition** Une droite est de type espace, lumière ou temps, etc.

**Définition** De même pour les 2-plans et pour les hyperplans.

**Définition** On note  $O(2, 1)$  le groupe de Lie des transformations linéaires de  $\mathbf{R}^3$  qui préservent la métrique de  $\mathbf{R}_1^3$ , et  $SO(2, 1)$  le sous-groupe de ceux qui sont de déterminant 1. On note  $O_+(2, 1)$  le sous-groupe de  $O(2, 1)$  le sous-groupe des éléments  $u$  tels que :

$$\langle u(e_0), e_0 \rangle > 1 .$$

On note  $SO_+(2, 1) = O_+(2, 1) \cap SO(2, 1)$ . C'est la composante connexe de l'identité dans  $O(2, 1)$ .

**Propriété** Les éléments de  $O(2, 1)$  sont les applications linéaires dont les colonnes des matrices forment des bases orthonormées pour  $\langle, \rangle$ .

**Remarque** Les symétries orthogonales par rapport aux plans de type temps sont dans  $O_+(2, 1)$ .

### Définition du plan hyperbolique

**Définition** On note :

$$H^2 := \{x \in \mathbf{R}_1^3 \mid x_0 > 0 \wedge \langle x, x \rangle = -1\} ,$$

muni de la métrique induite, qui est riemannienne.

**Propriété**  $H^2$  est invariant sous l'action de  $O_+(2, 1)$ , qui agit par isométries.  $SO_+(2, 1)$  agit transitivement sur le fibré unitaire de  $H^2$ .

**Connexion** Comme dans le cas de la sphère.

**Courbure** Similaire au cas de la sphère, mais on a maintenant, si  $x, y$  forment une base orthonormée :

$$\langle R_{x,y}y, x \rangle = -1 .$$

On dit que  $H^2$  est à courbure constante  $-1$ .

**NB** Avec la présentation donnée dans les chapitres précédents, il faut utiliser un autre argument et faire un calcul en coordonnées polaires, pour calculer d'abord la connexion puis la courbure.

**Propriété** Les géodésiques de  $H^2$  sont les intersections avec  $H^2$  des plans vectoriels de type temps de  $\mathbf{R}_1^3$ .

Preuve : par l'action du groupe des isométries il suffit de montrer que l'intersection avec les plans verticaux sont des géodésiques, c'est clair par symétrie. Puis nouvel argument utilisant les isométries pour montrer que toutes les géodésiques sont de ce type, en utilisant qu'une géodésique est uniquement déterminée par un point et un vecteur directeur.

## 4.2 Le modèle projectif

**Objectif** Essayer de comprendre le plan hyperbolique en le "représentant" comme un domaine de  $\mathbf{R}^2$ , en préservant certaines de ses propriétés.

**Définition** Par projection sur  $x_0 = 1$  dans la direction de 0.

**Propriété** L'image est la boule de rayon 1,  $B^2$ . Les géodésiques de  $H^2$  sont envoyés sur les segments de  $B^2$ .

**Preuve** Ce sont les intersections avec les plans vectoriels de type temps.

**Propriété** Les points à distance  $\rho$  de  $(1, 0, 0)$  sont envoyés sur les points à distance  $\tanh(\rho)$  de 0.

**Propriété** Soit  $x, y \in H^2$ , soit  $\rho$  la distance hyperbolique entre eux. Alors  $\langle x, y \rangle = \cosh(\rho)$ .

**Preuve** Il suffit de prendre  $x = 0$  grâce à l'action de  $SO(2, 1)$ .

**Propriété** Dans le modèle projectif, la métrique du plan hyperbolique s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{1-r^2}h_r + \frac{1}{(1-r^2)^2}dr^2 ,$$

où  $h_r$  est la métrique de la sphère de rayon  $r$ .

**Preuve** Par coefficient de projection latérale égal à  $\cosh(\rho)$  par le modèle projectif, et égal à  $1/\tanh'(\rho) = \cosh^2(\rho)$  dans la direction radiale.

**Remarque** Ne préserve par contre pas les angles !

## 4.3 Le disque de Poincaré

**Définition** Par projection sur  $\{x_0 = 0\}$  dans la direction de  $(-1, 0, 0)$ .

**Propriété** L'image est le disque de rayon 1,  $B^2$ .

**Propriété** Dans le modèle du disque de Poincaré, la métrique hyperbolique s'écrit :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

**Propriété** Ce modèle préserve les angles!

**Propriété** Envoie les points à distance  $\rho$  de  $(1, 0, 0)$  sur les points à distance  $r = \sinh(\rho)/(1 + \cosh(\rho)) = \tanh(\rho/2)$ .

**Propriété** Dans le modèle du disque de Poincaré, les géodésiques sont les segments de droite ou de cercles orthogonaux au cercle unité.

**Preuve** On se ramène à une géodésique qui est l'intersection avec  $H^2$  du plan d'équation :

$$x_2 = \lambda x_0,$$

avec  $\lambda < 1$ . L'image d'un point  $(x_0, x_1, x_2)$  est le point de coordonnées  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , avec :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{x_0 + 1}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{x_0 + 1},$$

soit, inversement :

$$x_0 = \cosh(\rho) = 2 \cosh^2(\rho/2) - 1 = \frac{2}{1-r^2} - 1 = \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad x_0 + 1 = \frac{2}{1-r^2},$$

$$x_1 = \bar{x}_1(x_0 + 1) = \frac{2\bar{x}_1}{1-r^2}, \quad x_2 = \frac{2\bar{x}_2}{1-r^2}.$$

L'équation de la projection de la géodésique est donc :

$$\frac{2\bar{x}_2}{1-r^2} = \lambda \frac{1+r^2}{1-r^2},$$

soit encore :

$$\lambda(1 + \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) = 2\bar{x}_2,$$

$$\bar{x}_1^2 + (\bar{x}_2 - \frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2} - 1.$$

On vérifie alors (géométrie élémentaire) que ce sont bien des cercles orthogonaux au cercle unité.

## 4.4 Le demi-plan de Poincaré

**Définition** Par inversion à partir du disque de Poincaré; on identifie  $\mathbf{R}^2$  à  $\mathbf{C}$ , et on pose :

$$\rho(z) = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2}.$$

$\rho$  définit un difféo du disque  $D^2$  dans  $\mathbf{R}_+^2 := \mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+ = \mathbf{R} + i\mathbf{R}_+^*$ .

**Preuve** On vérifie que  $Im(\rho(z)) = 0$  ssi  $|z| = 1$ . Ou par construction et propriétés des inversions, qui envoient les cercles et les droites sur des cercles ou des droites.

**Propriété** Modèle conforme.

**Preuve** Par construction, car les applications holomorphes préservent les angles.

**Propriété** L'application  $\rho$  est donnée explicitement par :

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{|z-i|^2}, \frac{1-|z|^2}{2|z-i|^2} \right).$$

**Lemme** La métrique est :

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

**NB.** Ca devrait rappeler quelque chose (l'espace des métriques plates sur le tore)!

**Preuve** Le coefficient de déformation conforme de la métrique par l'application  $\rho$  est donné par :

$$c(x, y) = \left| \frac{d\rho}{dz} \right| = \left| \frac{d}{dz} \frac{1}{z-i} \right| = \frac{1}{|z-i|^2},$$

c'est à dire que si on appelle  $x', y'$  les coordonnées dans le modèle du demi-espace, on a :

$$dx^2 + dy^2 = |z-i|^4 (dx'^2 + dy'^2).$$

Or la métrique hyperbolique, dans le modèle du disque de Poincaré, est :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

La métrique hyperbolique, dans le modèle du demi-espace, est donc :

$$\frac{4|z-i|^4}{(1-|z|^2)^2} (dx'^2 + dy'^2),$$

qui est de la forme souhaitée d'après le calcul direct de  $\rho$  en coordonnées effectué plus haut.

**Lemme** L'élément d'aire est :  $dx \wedge dy/y^2 = d(dx/y)$ .

**Lemme** Action des isométries par :

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d},$$

où  $ad - bc = 1$ .

**Preuve** Soit  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  avec  $ad - bc = 1$ . On va montrer que c'est une isométrie. En effet, le facteur conforme de cette transformation est :

$$\left| \frac{d}{dz} \frac{az + b}{cz + d} \right| = \left| \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \right| = \frac{1}{|cz + d|^2},$$

donc :

$$dx^2 + dy^2 = |cz + d|^4 (dx'^2 + dy'^2).$$

Mais si l'image de  $(x, y)$  est  $(x', y')$ , on a :

$$y' = \frac{y}{|cz + d|^2}.$$

On a donc :

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dx'^2 + dy'^2}{y'^2},$$

et la transformation est bien une isométrie.

On peut conclure en remarquant que les transformations de ce type agissent de manière transitive sur le fibré tangent unitaire de  $H^2$  dans le modèle du demi-espace de Poincaré.



**Corollaire** On peut identifier le groupe des isométries de  $H^2$  avec  $PSL(2, \mathbf{R})$ .

**Preuve** La multiplication de  $PSL(2, \mathbf{R})$  correspond avec la composition des fractions.

**Propriété** Les géodésiques de  $H^2$ , dans le modèle du demi-espace, sont les demi-droites et les demi-cercles orthogonaux à l'axe des  $x$ .

**Preuve** Les géodésiques dans le modèle du disque de Poincaré sont des arcs de cercles (ou de droites) orthogonaux au bord. Après une inversion, les arcs de cercles ou de droite restent des arcs de droite ou de cercles, et l'orthogonalité au bord est aussi préservée.

**Remarque** Les actions des isométries sur le bord à l'infini sont les actions projectives sur  $\mathbf{RP}^1$ .

## 4.5 Comportements des géodésiques

**Géodésiques asymptotiques** C'est une grande différence avec le cas euclidien ! En plus très utile pour définir le bord à l'infini du plan hyperbolique.

**Définition** Soit  $c_1, c_2 : \mathbf{R} \rightarrow H^2$  deux géodésiques, paramétrées à vitesse 1. Elles sont asymptotiques en  $+\infty$  ssi  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(c_1(t), c_2) = 0$ .

**Propriété** Deux géodésiques sont asymptotiques si et seulement si leurs images dans le modèle projectif (resp. le modèle du disque de Poincaré, le modèle du demi-espace de Poincaré) ont la même extrémité.

**Preuve** Si les extrémités sont distinctes, les géodésiques ne peuvent pas être asymptotiques. Pour montrer la réciproque, on remarque que les applications entre les modèles, qui sont isométriques pour la métrique hyperbolique, sont continues jusqu'au bord. Il suffit donc de montrer le résultat pour l'un des 3 modèles, par exemple pour le modèle du demi-espace de Poincaré, lorsque le point extrémité n'est pas le point à l'infini (i.e. quand c'est un point de l'axe réel).

Dans ce cas, les géodésiques correspondent à des arcs de cercle orthogonaux au bord, donc ils sont à distance euclidienne en  $y^2$ . Mais le facteur conforme de la métrique hyperbolique est  $1/y$ , donc la distance hyperbolique est en  $y$ , donc tend vers 0 au bord.

**Remarque** En fait  $d(c_1(t), c_2)$  décroît de manière exponentielle en  $t$ .

## 4.6 Le bord à l'infini

**Définition** Par le bord du modèle projectif ou du disque de Poincaré.

**Définition** Par les classes d'équivalence de géodésiques orientées, pour la relation d'équivalence d'être asymptotique.

**Propriété** Etant donné deux points du bord à l'infini, il existe une unique géodésique ayant ces points comme extrémités.

**Remarque** Dans le modèle du demi-espace de Poincaré, les géodésiques dont une extrémité est sur le point à l'infini sont envoyées sur les droites verticales.

**Action à l'infini des isométries** Agissent comme des transformations projectives réelles. Dans différents modèles :

- Modèle projectif :
- Modèle du disque de Poincaré :
- Modèle du demi-espace de Poincaré :

**NB** On peut identifier le bord à l'infini avec  $S^1 = \partial D^2$  (modèle du disque de Poincaré ou modèle projectif), dans ce cas les isométries agissent comme des transformations projectives de  $\mathbf{RP}^1 = S^1$ . Ou bien comme  $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ , et dans ce cas action des isométries comme des transformations projectives réelles.

## 4.7 Horocycles

**Fonctions de Busemann** Ce sont les "distances aux points à l'infini".

**Définition** Soit  $\xi \in S^1$ , soit  $x_0 \in H^2$ . Pour tout  $x \in H^2$ , on définit  $B_\xi(x_0, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - d(x_0, \gamma(t))$ , où  $\gamma$  est une géodésique dont l'extrémité est en  $\xi$ .

**Propriété** Cette limite existe et est indépendante du choix de  $\gamma$ .

Preuve : pour l'existence calcul dans l'un des modèles. Puis indépendance par def de géodésiques asymptotiques.

**Définition** Les *horocycles* sont les ensembles de niveau des fonctions de Busemann. A chaque horocycle est associé un point à l'infini, son "centre".

**Définition** Un *cercle géodésique* est l'ensemble des points à distance hyperbolique  $R$  d'un point donné.

**Remarque** Les horocycles sont des limites de cercles géodésiques, au sens de la convergence de Hausdorff sur les compacts.

**Propriété** Dans le modèle de l'hyperboloïde, les cercles sont les intersections de  $H^2$  avec les plans affines de type espace.

**Preuve** Il suffit de le montrer lorsque le centre est  $(0, 0, 1)$ , lorsque le cercle est de rayon  $r$ , puis on fait agir les isométries.

**Propriété** Dans le modèle de l'hyperboloïde, les horocycles sont les intersections de  $H^2$  avec les plans de type lumière.

**Preuve** Conséquence de la propriété précédente en prenant une limite de cercles géodésiques.

**Propriété** Dans le modèle du disque de Poincaré, les cercles géodésiques ont pour image les cercles contenus dans le disque unité ouvert, et les horocycles ont pour image les cercles tangents au bord du disque.

**Preuve** On peut utiliser la définition du modèle de Poincaré par projection, et utiliser les propriétés concernant le modèle de l'hyperboloïde.

**Propriété** Dans le modèle du demi-espace de Poincaré, les cercles géodésiques ont pour image les cercles contenus dans les demi-espace, et les horocycles ont pour image les cercles tangents au bord et les droites horizontales.

**Propriété** Dans le modèle projectif, les horocycles ont pour image les ellipses de demi-grand axe  $\epsilon, \epsilon^2$ , et qui sont tangentes au bord en une des extrémités de leur petit axe.

**Exercice** Le montrer.

### Courbure géodésique

**Propriété** La courbure des horocycle est partout égale à 1.

## 4.8 Géométrie du triangle

**La formule de Gauss-Bonnet** Soit  $(a, b, c)$  un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont  $\alpha, \beta, \gamma$ . Alors son aire est  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ .

**Remarque** En particulier, la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à  $\pi$ !

**Preuve** Déjà vu dans cadre plus général.

**Formule fondamentale de la géométrie du triangle** Soit  $(a, b, c)$  un triangle hyperbolique général, avec un angle  $\theta$  en  $a$ . Alors :

$$\cosh(A) = \cosh(B) \cosh(C) - \cos(\theta) \sinh(B) \sinh(C) .$$

**Preuve** On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. Soit  $u, v$  les vecteurs unitaires en  $a$  dans la direction de  $b, c$  respectivement. Alors :

$$b = \cosh(C)a + \sinh(C)u, c = \cosh(B)a + \sinh(B)v ,$$

$$\cosh(\theta) = \langle u, v \rangle .$$

On obtient le résultat en utilisant que :

$$\cosh(A) = \langle b, c \rangle .$$

**Le triangle idéal** C'est un triangle dont les trois sommets sont à l'infini.

**Propriété** Soit  $T, T'$  deux triangles idéaux. Il existe une isométrie hyperbolique qui envoie  $T$  sur  $T'$ . Tous les triangles idéaux ont pour aire  $\pi$ .

**Preuve** Parce que l'action de  $PSL(2, \mathbf{R})$  sur  $\mathbf{R}P^1$  est transitive sur les triplets de points.

## Exercices

**1** Donner une caractérisation géométrique des horosphères dans le modèle de l'hyperboloïde.

**2** Soit  $g_1, g_2 : \mathbf{R} \rightarrow H^2$  deux géodésiques paramétrées à vitesse constante. Montrer que la fonction :

$$d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ (s, t) \mapsto d(g_1(s), g_2(t))$$

est convexe. Comparer avec le cas euclidien.

**3** Soit  $\theta \in (0, \pi/3)$ . Montrer qu'il existe un triangle régulier dont les angles sont égaux à  $\theta$ , est qu'il est unique aux isométries de  $H^2$  près. Peut-on donner un énoncé analogue pour les polygones réguliers à 4 cotés ?

**4** Montrer qu'il existe un analogue du modèle projectif pour  $S^2$ , qui envoie un hémisphère sur le plan.

5 Montrer qu'il existe un analogue du modèle du disque de Poincaré pour  $S^2$ , qui envoie le complémentaire d'un point sur le plan de manière conforme.

6 1. Soit  $x, y, a, b$ , on appelle *birapport* de ces quatre points la quantité :

$$[x, y; a, b] := \frac{(x-a)(y-b)}{(x-b)(y-a)} .$$

Montrer que le birapport est invariant sous les transformations projectives de  $\mathbf{R}$ .

On considère le disque unité  $D^2$ . Soit  $x, y \in D^2$  distincts, on appelle  $a, b$  les intersections de la droite  $(x, y)$  avec  $S^1$ , et on pose :

$$d_h(x, y) := -\frac{1}{2} \log[x, y; a, b] ,$$

et on appelle  $d_h$  la *distance de Hilbert* de  $D^2$ .

2. Montrer que, pour tout  $x \in D^2$ ,  $d_h(0, x) = \operatorname{argth}(|x|)$ .

3. Montrer que les isométries hyperboliques agissent de manière projective dans le modèle projectif. En déduire que  $d_h$  est la distance associée à la métrique hyperbolique dans le modèle projectif.

On remplace maintenant  $D^2$  par un domaine  $C$  relativement compact, strictement convexe, de  $\mathbf{R}^2$ .

4\*. Montrer que, si  $x, y, z \in D^2$ ,  $d_h(x, y) \leq d_h(x, z) + d_h(y, z)$ , avec égalité ssi  $z \in [x, y]$ .

5. Montrer que la distance  $d_h$  ne provient pas d'une métrique riemannienne, sauf si  $C$  est un ellipsoïde.

# Chapitre 5

## Surfaces hyperboliques

### Motivations

On voudrait aborder les trois visages de la “théorie de Teichmüller”.

**Géométrique.** Construction par recollement de polygones.

**Algébrique.** Approche par les quotients compacts de  $H^2$ .

**Analytique** Par les structures conformes et la recherche de métriques à courbure donnée.

### 5.1 Les surfaces

**Théorème** Les surfaces orientées sont classifiées, à difféomorphisme près, par leur genre.

**NB** La seule surface de genre 0 orientable est la sphère. La seule de genre 1 est le tore, qui admet des métriques plates. Pour les genre supérieur les surfaces admettent toujours des métriques hyperboliques, comme on va le voir.

**Découpage en pantalons** Une manière particulièrement pratique pour construire des surfaces de genre  $g \geq 2$ , en rapport avec la géométrie hyperbolique.

**Définition** Pantalons : sphère privée de 3 disques.

**Lemme** Obtenu par recollement de 2 hexagones le long de 3 de leurs arêtes.

#### La formule d’Euler

**Définition** Triangulations des surfaces : décomposer une surface en réunion d’un nombre fini d’images par des difféos de triangles de  $\mathbf{R}^2$ . On demande que les intérieurs soient disjoints, et que l’intersection de deux arêtes d’images de triangles soit une arête de chacun d’entre eux, ou un sommet. Définition des faces, des arêtes et des sommets d’une triangulation.

**Définition** Cellulation : comme une triangulation, mais on prend des polygones au lieu de prendre seulement des triangles.

**Définition** Cellulation plus fine qu’une autre : les faces de la plus fine sont incluses dans les faces de la plus grossière.

**Théorème** (admis) Etant donné deux cellulations, il existe une triangulation qui est plus fine que chacune d'entre elles.

**Définition** La caractéristique d'Euler :  $\chi = 2 - 2g$ .

**Exemple** 2 pour la sphère, 0 pour le tore, etc.

**Théorème** Formule d'Euler :  $f - a + s = \chi$ .

**Preuve** On montre que  $f - a + s$  reste constant lorsque on raffine une triangulation. Or deux triangulations ont une triangulation commune plus fine (admis...). Donc le nombre  $f - a + s$  est indépendant de la triangulation. On conclut avec des pantalons et des hexagones.

## 5.2 La formule de Gauss-Bonnet, le retour

**Définition** Polygones hyperboliques, comme des polygones (euclidiens) vus dans le modèle projectif.

**NB** On peut aussi admettre des sommets "idéaux", c'est à dire sur le bord du disque.

**Définition** Angles extérieurs des polygones : le complémentaire à  $2\pi$  des angles intérieurs.

**Théorème** Gauss-Bonnet généralisé aux intérieurs de polygones : la somme des angles extérieurs est égale à  $2\pi - A$ .

**Preuve** Découpage en triangles, et on applique la formule de Gauss-Bonnet pour les triangles.

**Définition** Les surfaces hyperboliques sont des surfaces munies de métriques localement isométriques à la métrique du plan hyperbolique.

**Théorème** Pour une surface hyperbolique,  $A = 2\pi\chi$ .

**Preuve** On choisit une famille de points assez nombreuse, et on remarque que, si les points sont assez proches, il existe des segments qui les joignent. On en déduit une cellulation de la surface dont les arêtes sont des segments géodésiques. On applique la formule de Gauss-Bonnet pour les polygones, on trouve que :

$$A = \sum_f A(f) = \sum_f (2\pi - \pi s(f)) + \sum_s \theta(f, s) .$$

Mais la somme de tous les angles (intérieurs) est  $2\pi s$ , donc :

$$A = 2\pi f - \pi \sum_f s(f) + 2\pi s .$$

Or  $s(f) = a(f)$  et chaque arête est dans deux faces, si bien que :

$$\sum_f s(f) = \sum_f a(f) = 2a ,$$

et finalement  $A = 2\pi\chi$ .

**Corollaire** Seules les surfaces de genre  $g \geq 2$  peuvent admettre une métrique hyperbolique.

## 5.3 Polygones à angles droit

**Définition** Polygones réguliers, hexagones réguliers.

**Propriété** Existence d'un hexagone régulier à angle droit (unique) d'angles égaux à  $\alpha$ , pour chaque  $\alpha$  compris entre 0 et  $2\pi/3$ .

**Preuve** Construction par choix des sommets équirépartis sur un cercle de centre  $R$ . On note que l'angle en  $R = 0$  est l'angle euclidien, soit  $2\pi/3$ , alors que l'angle en  $R \rightarrow \infty$  est nul. Puis par par monotonie et par Gauss-Bonnet.

**Corollaire** Il existe un hexagone régulier à angles droits.

**Proposition** Soit  $d, d'$  deux géodésiques disjointes de  $H^2$ . Il existe un unique couple  $(x, x')$ , avec  $x \in d$  et  $x' \in d'$ , qui minimise la distance entre  $d$  et  $d'$ . La géodésique  $\delta$  passant par  $x$  et  $x'$  est orthogonale à  $d$  et à  $d'$ .

**Preuve** Existence d'un couple minimisant la distance par argument de compacité. Unicité : preuve possible par convexité de la distance entre deux géodésiques (exercices du chapitre 1). Alternative : on suppose qu'il existe deux tels couples  $(x, x')$  et  $(y, y')$ . Alors les segments joignant  $x$  à  $x'$  et  $y$  à  $y'$  sont disjoints, sinon pas minimisant. Puis contradiction avec Gauss-Bonnet sinon 4-gone à angles droits, impossible.

**Définition** Longueurs des arêtes d'un hexagone à angles droits : on ne considère en fait que 3 arêtes, qui ne sont pas adjacentes.

**Lemme** Soit  $l_1, l_2, l_3 > 0$ . Il existe un unique hexagone à angles droits dont les longueurs des cotés sont les  $l_i$ . (Unicité aux isométries hyperboliques près).

**Preuve** Dessin! On choisit d'abord une droite  $d_1$  (passant par 0 dans le modèle du disque de Poincaré) puis on fait partir deux droites  $\delta_2$  et  $\delta_3$ , orthogonales à  $d_1$ , à distance  $\mu$  l'une de l'autre. On en fait partir deux autres droites  $d_2$  et  $d_3$ , respectivement à distance  $l_2$  et  $l_3$ .

On considère alors la droite  $\delta_1$  qui minimise la distance entre  $d_2$  et  $d_3$ , et on remarque que sa longueur est une fonction monotone de  $\mu$ , etc.

## 5.4 Pantalons

**Définition** Pantalons (topologiques), comme la sphère privée de 3 disques.

**Définition** Pantalons (hyperboliques), comme pantalons topologiques munis d'une métrique hyperbolique pour laquelle les 3 composantes de bord sont totalement géodésiques.

**Propriété** En recollant deux hexagones réguliers le long de trois de leurs arêtes (alternées) on obtient un pantalon hyperbolique.

**Lemme** Soit  $P$  un pantalon, de bord  $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ . Il existe une unique classe d'homotopie de courbes joignant  $C_1$  à  $C_2$  contenant une courbe plongée.

**Lemme** Considérons un pantalon hyperbolique  $P$ , avec  $\partial P = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ . Il existe une unique géodésique plongée  $c_1$  joignant  $C_2$  à  $C_3$ , orthogonale à  $C_2$  et à  $C_3$ , et de même pour les deux autres.

Admis. Possible de faire dessin en se ramenant au plan privé de deux disques (ou de deux points).

**Preuve** Existence : on utilise la courbe minimisant la distance entre  $C_2$  et  $C_3$ . C'est un segment géodésique, orthogonal aux deux composantes connexes du bord. De plus il est plongé. Pour l'unicité on suppose qu'il en existe deux, ils sont homotopes et on applique Gauss-Bonnet pour mettre en évidence une contradiction. Si deux courbes homotopes joignent une composante connexe à une autre, chacune orthogonale aux deux composantes connexes du bord, alors :

- si les segments sont disjoints, on a une contradiction avec Gauss-Bonnet ;
- sinon, on a un triangle dont la somme des angles est strictement supérieure à  $\pi$ , ce qui contredit aussi Gauss-Bonnet.

**NB** Les géodésiques joignant les différentes composantes du bord sont disjointes.

**Preuve** Par minimalité, sinon on pourrait les remplacer par des courbes plus courtes composées de deux segments géodésiques.

**Corollaire** Chaque pantalon hyperbolique a une unique décomposition en deux hexagones isométriques.

**Corollaire** Les pantalons hyperboliques sont uniquement déterminés par les longueurs des composantes connexes de leur bord, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.

**Preuve** Etant donné un pantalon hyperbolique, on peut le découper en deux hexagones à angles droits, qui sont isométriques car les longueurs de leurs cotés sont égales. On utilise alors le résultat sur les hexagones hyperboliques.

**NB** On en déduit deux points distingués sur chacune des composantes connexes du bord.

## 5.5 Découpage des surfaces en pantalons

**Définition** Une décomposition (topologique) en pantalons est la donnée d'une famille de classes d'homotopie de courbes fermées simples, disjointes, telles que la complémentaire soit une réunion disjointe de pantalons.

**NB** Les décompositions (topologiques) en pantalons sont préservées par les isotopies, mais pas par les difféos.

**Remarque** Etant donné une surface de genre  $g \geq 2$ , elle admet au moins une décomposition en pantalons. Pour obtenir une décomposition en pantalons, il suffit de couper récursivement la surface le long de courbes fermées simples non triviales et non homotopes à une composante du bord. Lorsqu'on ne peut plus le faire, c'est qu'on a une décomposition en pantalons. Basé sur le lemme suivant.

**Lemme** Soit  $S$  une surface orientable compacte à bord, alors  $S$  contient une courbe non triviale non homotope à une composante du bord sauf si  $S$  est :

- la sphère,
- le disque,
- un anneau,
- un pantalon.

**Preuve** On suppose d'abord que  $S$  est de genre au moins 1, cad que  $S$  est une surface fermée  $S'$  de genre non nul privée d'un nombre fini de disques. Dans ce cas  $S'$  contient une courbe non triviale, qui est donc non triviale et non homotope à une composante de bord dans  $S$ . Il reste à considérer le cas où  $S$  est  $S^2$  privée d'un certain nombre de disques, soit  $n$ . Si  $n$  est au moins 4, on prend une courbe qui sépare  $S^2$  avec au moins 2 disques de chaque côté. Sinon, on est dans l'un des cas exclus.

**Lemme** Chacune de ces décomposition est composée de  $2g - 2$  pantalons, et donc de  $4g - 4$  hexagones.



**Preuve** L'aire de la surface est, d'après le thm de Gauss-Bonnet,  $4\pi(g-1)$ . Toujours par Gauss-Bonnet (eg pas doublement) les pantalons sont d'aire  $2\pi$ . Le résultat suit.

**Propriété** Chaque surface orientée admet une (des) métrique(s) hyperbolique(s).

**Preuve** Par recollement d'hexagones à angles droits.

**NB** Il y a énormément de décompositions d'une surface en pantalons (topologiques). A chaque étape il y a beaucoup de choix possibles de la courbe fermée le long de laquelle on découpe.

**Remarque** Soit  $S$  une surface de genre  $g \geq 2$ , munie d'une décomposition topologique en  $2g-2$  pantalons, chacun composé (topologiquement) de 2 hexagones. On se donne une donnée combinatoire supplémentaire : pour chaque pantalon et chacun de ses bord, le choix de l'un des autres bords (pour avoir un point marqué bien défini sur le bord choisi). Soit  $g$  une métrique hyperbolique sur  $S$ , dont la restriction à chaque hexagone en fait un hexagone hyperbolique à angles droits. Pour chaque composante connexe de bord d'un pantalon, on a deux nombres :

- sa longueur, qui est un nombre strictement positif ;
- la distance orientée le long du bord entre les points marqués correspondants à chacun des cotés (dépendant du choix d'un point marqué pour chaque côté), qui est un élément de  $[0, l[$  ou de manière équivalente de  $S^1$ .

**Théorème** Réciproquement, chacune des valeurs possibles est réalisable.

**Lemme** (admis) Soit  $S$  une surface, et soient  $c_1, c_2$  deux courbes fermées simples dans  $S$ . Soient  $c'_1, c'_2$  deux courbes fermées simples, homotopes respectivement à  $c_1$  et à  $c_2$ . Si  $c'_1$  et  $c'_2$  se rencontrent, l'une des composantes connexes de leur complémentaire est topologiquement un disque.

**Corollaire** Soit  $S$  une surface, munie d'une décomposition topologique en pantalons. Soit  $g$  une métrique hyperbolique sur  $S$ . Alors  $S$  admet une décomposition en pantalons hyperboliques correspondant à la décomposition topologique donnée.

**NB** Traduction : famille de géodésiques homotopes aux bords des pantalons topologiques donnés, etc.

**Preuve** On réalise chacune des courbes par une géodésique fermée, et on utilise à nouveau Gauss-Bonnet pour montrer que ces géodésiques sont disjointes (avec le lemme admis).

**Conséquence :** étant donné une surface  $S$ , munie d'une décomposition topologique en pantalons, et des pantalons en hexagones, toutes les métriques hyperboliques sur  $S$  sont obtenues par recollement d'hexagones à angles droits comme décrit plus haut.

## 5.6 L'espace de Teichmüller vu par les pantalons

**Def.**  $\mathcal{M}_g$  l'espace des modules des métriques hyperboliques sur une surface de genre  $g$ , aux difféos près.  $\mathcal{T}_g$  l'espace de Teichmüller des métriques hyperboliques aux isotopies près.

**NB**  $\mathcal{T}_g$  est un revêtement de  $\mathcal{M}_g$ . On va voir qu'en fait  $\mathcal{T}_g$  est simplement connexe, si bien que c'est le revêtement universel de  $\mathcal{M}_g$ , et  $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\Gamma$ , où  $\Gamma = D/D_0$ .

**Explication** On peut penser à une surface de genre  $g$  comme un objet topologique "mou". Un élément de  $\mathcal{M}_g$  est un "vêtement" non déformable, qu'on peut utiliser pour "habiller" la surface par une métrique hyperbolique. Mais ce vêtement peut être mis de différentes manières (ce qui correspond à l'action d'un difféo non isotope à l'identité). Un élément de  $\mathcal{T}_g$  est un vêtement avec en plus des instructions précises sur la manière de la mettre.

**Analogie** Avec l'espace de Teichmüller du tore, par les métriques plates.

**Lemme** L'espace des métriques hyperboliques sur une surface  $S$  est une variété de dimension  $6g - 6$ .

**Preuve** On choisit une décomposition en pantalons, et une métrique hyperbolique  $g_0$ . Au voisinage de  $g_0$ , on a une paramétrisation locale par les paramètres de recollement : longueur des composantes de bord et paramètres de recollement.

**Remarque** Les paramètres locaux sont :

- les longueurs des bords des pantalons
- les “twists de Dehn fractionnaires” possibles le long des composantes de bord.

Mais ceci ne décrit ni  $\mathcal{M}_g$  ni  $\mathcal{T}_g$ , en effet :

- un élément de  $\mathcal{M}_g$  peut être décrit d'un grand nombre de manières, suivant la décomposition en pantalons (topologique) qu'on a choisie,
- beaucoup d'éléments de  $\mathcal{T}_g$  peuvent correspondre aux mêmes paramètres, et différer par un twist de Dehn “entier”.

Par contre les isotopies préservent les décompositions (topologiques) en pantalons, et donc deux éléments de  $\mathcal{T}_g$  correspondent aux mêmes paramètres. On a donc une application

$$\mathcal{T}_g \rightarrow (\mathbf{R} \times S^1)^{3g-3} .$$

**NB** Il est clair que le revêtement universel de  $(\mathbf{R} \times S^1)^{3g-3}$  est  $\mathbf{R}^{6g-6}$ . On va voir (schématiquement) que  $\mathcal{T}_g$  est connexe et simplement connexe, il suivra qu'il est homéomorphe à  $\mathbf{R}^{6g-6}$ .

## 5.7 Les surfaces hyperboliques comme quotient

**Lemme** La seule surface hyperbolique complète et simplement connexe est  $H^2$ .

**Preuve** Soit  $S_0$  une surface hyperbolique complète et simplement connexe. Soit  $x_0 \in S_0$ , on considère l'application exponentielle  $\exp_{x_0} : T_{x_0}S_0 \rightarrow S_0$ . C'est un difféomorphisme local, d'après le comportement des champs de Jacobi le long des géodésiques, car seule la courbure intervenait dans la description du comportement de ces champs.

De plus elle est injective : sinon il existerait deux géodésiques allant de  $x_0$  à un point  $x$ , c'est impossible d'après Gauss-Bonnet. Donc  $\exp_{x_0}$  est un difféomorphisme global.

On choisit maintenant  $x_1 \in H^2$ , une isométrie  $\phi : T_{x_0}S_0 \rightarrow T_{x_1}H^2$ , et on définit une application :

$$\psi := \exp_{x_1} \circ \phi \circ \exp_{x_0}^{-1} : S_0 \rightarrow H^2 .$$

On remarque que les champs de Jacobi sont envoyés sur les champs de Jacobi — le comportement est le même des deux cotés — et on en déduit que  $\psi$  est une isométrie de  $S_0$  sur  $H^2$ .

**Corollaire** Chaque surface hyperbolique est le quotient de  $H^2$  par un sous-groupe discret de  $PSL(2, R)$ .

**Définition** Action sans point fixe.

**Théorème** Soit  $(S, g)$  une surface hyperbolique, et soit  $\Gamma := \pi_1 S$ . Alors  $S = H^2/\Gamma$ , où  $\Gamma$  agit par isométries, discrètement et sans point fixe.

## 5.8 Structures conformes sur les surfaces

**Structures conformes sur les surfaces**

**Structures complexes, surfaces de Riemann**

**Changements conformes de métriques** On va voir quelques formules explicites de changement conforme de métrique sur les surfaces.

**Lemme** Soit  $g$  une métrique riemannienne sur une surface  $S$ , et soit  $\bar{g} = e^{2u}g$ . La connexion de Levi-Civita de  $\bar{g}$  est :

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + du(x)y + du(y)x - g(x, y)Du ,$$

où  $Du$  est le gradient de  $u$ .

**Preuve** On utilise la définition de la connexion de Levi-Civita :

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_x y, z) = x.\bar{g}(y, z) + y.\bar{g}(x, z) - z.\bar{g}(x, y) + \bar{g}([x, y], z) - \bar{g}([x, z], y) - \bar{g}([y, z], x) ,$$

si bien que :

$$2e^{2u}g(\bar{\nabla}_x y, z) = e^{2u}g(\nabla_x y, z) + e^{2u}(2du(x)g(y, z) + 2du(y)g(x, z) - 2du(z)g(x, y)) ,$$

d'où le résultat.

**Remarque** Valable aussi en dimension plus grande.

**Définition**  $\nabla u = -tr(\nabla Du)$ , où  $Du$  est le gradient de  $u$ . Aussi sous la forme :  $-e_i.du(e_i) + du(\nabla_{e_i} e_i)$ .

**Lemme** La courbure  $\bar{K}$  de  $\bar{g}$  est donnée par :

$$\bar{K} = e^{-2u}(K + \Delta u) .$$

(Ici  $\Delta$  est le Laplacien des géomètres, qui est positif sur  $L^2$ ).

**Preuve** On choisit un repère mobile orthonormé sur  $S$ , soit  $(e_1, e_2)$ ; on utilisera aussi  $(f_1, f_2) = (e_1, e_2)$ , on utilise deux notations distinctes pour ne pas se perdre dans les antisymétrisations (qui seront par rapport à  $(e_1, e_2)$ ).

On remarque que  $(e^{-u}e_1, e^{-u}e_2)$  est une base orthonormée pour  $\bar{g}$ , si bien que :

$$\bar{K} = \bar{g}(\bar{\nabla}_{e^{-u}e_1} \bar{\nabla}_{e^{-u}e_2} (e^{-u}f_2) - \bar{\nabla}_{e^{-u}e_2} \bar{\nabla}_{e^{-u}e_1} (e^{-u}f_2) - \bar{\nabla}_{[e^{-u}e_1, e^{-u}e_2]} f_2, f_1) ,$$

$$e^{2u}\bar{K} = g(\bar{\nabla}_{e_1} \bar{\nabla}_{e_2} f_2 - \bar{\nabla}_{e_2} \bar{\nabla}_{e_1} f_2 - \bar{\nabla}_{[e_1, e_2]} f_2, f_1) .$$

On développe suivant le lemme précédent, et on sépare tous les termes qui sont d'ordre 1 en  $\nabla_{e_i} e_j$ , dont on sait qu'ils disparaîtront. Il reste :

1.  $K$ , par les termes d'ordre 2 en  $e_i$ .
2. les termes d'ordre 2 en  $u$ , qui donnent  $-g(\nabla_{e_1} Du, f_1) - g(\nabla_{e_2} Du, f_2)$ , soit  $\Delta u$ .
3. les termes quadratiques en  $du$ , qui se simplifient.

**Remarque** En dimension plus grande les choses sont plus compliquées!

## 5.9 Un théorème d'uniformisation

**Théorème** Soit  $S$  une surface compacte de genre  $g \geq 2$ , et soit  $g_0$  une métrique régulière sur  $S$ , et soit  $K$  une fonction strictement négative sur  $S$ . Il existe un unique métrique  $g$  conforme à  $g_0$  dont la courbure est  $K$ .

**Corollaire** Dans chaque classe conforme, il existe une unique métrique hyperbolique.

**Définition** On note avec des indices 0 les quantités correspondant à  $g_0$ .

**Lemme** Soit  $u, v$  deux fonctions sur  $S$ . Alors :

$$\int_S \langle D_0 u, D_0 v \rangle da_0 = \int_S (\Delta_0 u) v da_0 .$$

En particulier :

$$\int_S \Delta_0 u da_0 = 0 .$$

**Preuve** On calcule  $d(udv \circ J)$  et on trouve les deux termes, puis on intègre sur la surface.

**Définition** On va utiliser l'espace  $H := W^{1,2}(S, g_0)$ , c'est l'espace de Sobolev des fonctions  $L^2$  dont le gradient est  $L^2$ . On introduit aussi le sous-espace  $H'$  de  $H$  des fonctions de moyenne nulle.

**Lemme** (inégalité de Trudinger) L'injection  $u \mapsto e^{2u}$  de  $H$  dans  $L^2$  est compacte.

**Preuve** Admis ici.

**Lemme** (inégalité de Poincaré) Il existe une constante  $c > 0$  (dépendant de  $g_0$ ) telle que, pour tout  $u \in H'$  (de moyenne nulle) on ait :

$$\|u\|_2^2 \leq c \|D_0 u\|_2^2 .$$

**Lemme** Tout sous-ensemble borné de  $H$  est faiblement compact.

**Preuve** Admis ici. Parce que  $H$  est un Hilbert.

**Preuve** A faire en exercice, un peu délicat. Plus simple : le faire seulement sur le tore (muni de la métrique produit de deux cercles).

**Preuve du théorème.** On pose  $g = e^{2u} g_0$ , il faut donc résoudre le problème suivant :

$$\Delta_0 u = K e^{2u} - K_0 ,$$

appelée parfois équation de Liouville (importante en physique). Soit (E), où  $\Delta_0$  est le Laplacien de  $g_0$  et  $K_0$  est sa courbure.

On introduit deux fonctionnelles :

$$F(u) = \int_S \|D_0 u\|^2 + 2K_0 u da_0, \quad G(u) = \int_S e^{2u} K da_0 .$$

Soit  $u \in H'$ . On remarque que d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\|D_0 u\|_2^2 \geq (1/c) \|u\|_2^2 ,$$

si bien que :

$$F(u) \geq (1/c) \|u\|_2^2 + 2\langle K_0, u \rangle_2 \geq -c \|K_0\|_2^2 .$$

Ainsi  $F$  est minorée sur  $H'$ .

Soit  $u$  une solution de (E), on devrait avoir :

$$G(u) = \int_S K_0 da_0 = 2\pi\chi(S) ,$$

si bien qu'on cherche des minima de  $F$  sur l'hypersurface  $G(u) = 2\pi\chi(S)$ . Pour un tel minimum, on doit avoir pour toute fonction  $v \in H$  :

$$dF_u(v) = \lambda dG_u(v) ,$$

soit, par intégration par parties :

$$\int_S (\Delta_0 u + K_0 - \lambda e^{2u} K) v da_0 = 0 .$$

Mais par Gauss-Bonnet on devrait donc avoir  $\lambda = 1$ . Il suffit donc de trouver un minimum de  $F$  avec  $G = 2\pi\chi(S)$ .

Comme  $K < 0$ , il existe  $a \in H$  telle que  $G(a) = 2\pi\chi(S)$ . Soit  $m := F(a)$ , on pose :

$$B := \{u \in H, F(u) \leq m \wedge G(u) = 2\pi\chi(S)\} .$$

Alors par construction  $B$  est non vide.

De plus,  $F$  est bornée inférieurement sur  $B$ . En effet, pour tout  $u \in H$ , on peut écrire  $u = \bar{u} + u'$ , où  $\bar{u}$  est la moyenne de  $u$  et  $u' \in H'$ , et alors  $G(u) = e^{2\bar{u}}G(u')$ , si bien que  $G(u') = e^{-2\bar{u}}2\pi\chi(S)$ . Mais

$$\begin{aligned} |G(u')| &= \int e^{2u'} |K| da_0 \\ &\geq \inf |K| \int e^{2u'} da_0 \\ &\geq \inf |K| \int 1 + 2u' da_0 \\ &\geq A(S, g_0) \inf |K| . \end{aligned}$$

et

$$e^{-2\bar{u}}2\pi|\chi(S)| \geq A(S, g_0) \inf |K| .$$

Donc  $\bar{u}$  est majoré sur  $B$ .

Comme  $F(u) = 4\pi\chi(S)\bar{u} + F(u')$  et  $F$  est minorée sur  $H'$ , on voit que  $F$  est minorée sur  $B$ .

Il existe donc une suite minimisante  $(u_n)$ , qui converge vers la borne inf de  $F$  sur  $B$ .

Montrons maintenant que  $B$  est borné dans  $H$ . On remarque d'abord que, sur  $B$ , on a :

$$G(u) = e^{2\bar{u}}G(u') = 2\pi\chi(S) .$$

donc la minoration de  $|G(u')|$  implique une majoration de  $\bar{u}$  sur  $B$ . Comme on a sur  $B$  :

$$F(u) = 4\pi\chi(S)\bar{u} + F(u') \leq m ,$$

on a :

$$F(u') \leq m + 4\pi|\chi(S)|\bar{u} ,$$

et il suffit de minorer  $F(u')$  par une constante fois  $\|u'\|_H$ . Mais

$$\begin{aligned} F(u') &= \|D_0 u\|^2 + 2\langle K_0, u \rangle \\ &\geq (1/2)\|D_0 u\|^2 + (1/2c)\|u\|^2 + 2\langle K_0, u \rangle \\ &\geq \lambda\|u\|_H^2 + (1/4c)\|u\|^2 + 2\langle K_0, u \rangle \\ &\geq \lambda\|u\|_H^2 - C , \end{aligned}$$

pour un certain  $\lambda > 0$  et un  $C \in \mathbf{R}$ , ce qui montre bien que  $B$  est borné dans  $H$ .

Donc  $B$  est faiblement compact, et  $(u_n)$  converge (après extraction d'une sous-suite) vers une limite  $u_0$ . Comme  $G$  est faiblement continue,  $G(u_0) = 2\pi\chi(S)$ , et donc, d'après les arguments donnés plus haut,  $u_0$  est une solution faible de (E).

En fait  $u_0$  est régulière (régularité elliptique) donc c'est une solution forte de (E).  $\square$

**Unicité :** c'est une conséquence du principe du maximum. On suppose qu'il existe deux solutions  $u_1, u_2$  distinctes, et on considère le maximum de  $u_1 - u_2$ ; on constate qu'il ne peut pas être positif, sinon on aurait  $K(e^{2u_1} - e^{2u_2})$  qui serait négatif. De même le minimum ne peut pas être négatif.

**NB** Il existe une autre manière (plus ancienne, essentiellement due à Riemann/Poincaré) de voir ce théorème, en termes de surfaces complexes. Dans cet autre approche on se contente de montrer que le revêtement universel de ces surfaces (munie d'une structure complexe) est le disque unité de  $\mathbf{C}$ .

## 5.10 Retour sur l'espace de Teichmüller

**Définition** D'après le résultat précédent, l'espace de Teichmüller de genre  $g$ ,  $\mathcal{T}_g$ , est l'espace des structures conformes, toujours modulo les difféos isotopes à l'identité.

**Théorème**  $\mathcal{T}_g$  est une boule de dimension  $6g - 6$ .

**Principe de la preuve.** On se limite à montrer que cet espace est connexe et simplement connexe. Le fait que c'est  $\mathbf{R}^{6g-6}$  suit alors des arguments précédents basés sur la décomposition en pantalons des surfaces hyperboliques.

**Définition** On note  $\mathcal{C}_g$  l'espace des structures conformes (sans faire le quotient par les isotopies).

**Lemme**  $\mathcal{C}_g$  est contractile.

**Preuve** Soit  $c_1 \in \mathcal{C}_g$ , on définit une contraction de  $\mathcal{C}_g$  sur  $c_1$  par une construction barycentrique, soit  $\phi_t, t \in [0, 1]$ , avec  $\phi_t(c) = tc_1 + (1-t)c$ . On remarque que, pour tout  $t$ ,  $\phi_t(c)$  est une structure conforme sur la surface.

**NB** En particulier,  $\mathcal{C}_g$  est connexe et simplement connexe.

**Lemme**  $Diff_0$  est simplement connexe.

**Preuve** Admis ici, lemme topologique pas trivial!

**Lemme** Le quotient d'un espace simplement connexe par un groupe connexe et simplement connexe est simplement connexe.

**Preuve** Admis ici, pas très étonnant mais la difficulté technique ici provient du fait que les deux sont de dimension infinie.

**Preuve du théorème.** Suit des arguments précédents car on fait le quotient de  $\mathcal{C}_g$ , qui est simplement connexe, par  $Diff_0$ , qui est aussi simplement connexe.

**Théorème**  $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\Gamma$ , où  $\Gamma = Diff(S)/Diff_0(S)$ .

**Preuve** Par construction!

**Définition**  $Diff(S)/Diff_0(S)$  est appelé le *groupe modulaire*.

**Remarque** Pour une surface de genre quelconque, le groupe modulaire est compliqué! C'est même un objet d'étude important. Mais il est simple pour le tore, dans ce cas c'est  $PSL(2, \mathbf{Z})$ , cf. les exercices.

**Remarque** On peut aussi considérer les espaces de métriques hyperboliques sur les surfaces à bord, ou sur les surfaces munies de points distingués. Pour les surfaces à bord on se limite en général aux métriques pour lesquelles le bord est géodésique. Pour les métriques avec des points distingués, on considère des métriques hyperboliques complètes sur le complémentaire des points, et d'aire finie.

## Exercices

# Chapitre 6

## L'espace hyperbolique

### Motivations

Après avoir bien compris la géométrie du plan hyperbolique, on va décrire l'espace hyperbolique de dimension 3. Une partie de la description est presque la même que pour le plan hyperbolique, en particulier tout ce qui concerne les différents modèles. Ceci se généralisera d'ailleurs sans aucun mal aux dimensions supérieures.

Par contre, l'analyse du groupe des isométries est différente ; là où apparaissait  $PSL(2, \mathbf{R})$  en dimension 2, on va voir apparaître  $PSL(2, \mathbf{C})$  en dimension 3. L'une des manières de l'expliquer est en référence à l'action de groupe des isométries sur le bord à l'infini.

### 6.1 Les principaux modèles

**L'espace de Minkowski de dimension 4** C'est le cadre "réel" de la relativité restreinte.

**Le modèle de l'hyperboloïde**

**Propriété** Les géodésiques sont les intersections avec les 2-plans de type temps contenant 0.

**Preuve** Par utilisation du cas de la dim 2 dans un plan.

**Le groupe des isométries**

**Définition** On note  $O(3,1)$  le groupe des isométries de  $\mathbf{R}_1^4$  qui préserve l'origine,  $SO(3,1)$  le sous-groupe des éléments qui préservent l'orientation, et  $O_+(3,1)$  le sous-groupe des éléments pour lesquels la première coordonnée de l'image de  $(1, 0, 0, 0)$  est positive.

**Propriété**  $O_+(3,1)$  agit transitivement sur les repères orthonormés de  $H^3$ .

**Lemme**  $H^3$  est homogène et isotrope, i.e. on "voit" la même chose où qu'on soit et quelque soit la direction dans laquelle on regarde.

**Preuve** Par l'action du groupe des isométries.

**Le modèle projectif** La métrique s'écrit :

$$\frac{dr^2}{(1-r^2)^2} + \frac{h_r}{1-r^2}$$

**Propriété** Les géodésiques sont les segments.

**Le disque de Poincaré** C'est maintenant une boule, on l'appelle encore "disque" par habitude... La métrique est :

$$\frac{4}{(1-r^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

**Propriété** Les géodésiques sont les demi-cercles orthogonaux au bord et les segments passant par 0

**Preuve** Par utilisation du cas de la dim 2 dans un plan.

**Le demi-espace de Poincaré**

**Définition** Il est obtenu à partir du disque de Poincaré, mais on n'a plus d'interprétation complexe, on se contente de faire une inversion :

$$\begin{aligned} \rho : D^3 &\rightarrow \mathbf{R}_+^3 \\ v &\mapsto \frac{(0,0,1)-v}{\|v-(0,0,1)\|^2} - (0,0,1/2) . \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est bien à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^3$ , car la coordonnée suivant  $z$  de  $\rho(v)$  est nulle ssi  $\|v\| = 1$ , et on constate que l'image de 0 est bien dans le bon demi-espace.

**Propriété** Les géodésiques sont les demi-cercles orthogonaux au bord et les demi-droites verticales.

**Métrique, connexion, courbure** Les définitions sont analogues à celle du plan hyperbolique. L'opérateur de courbure est encore antisymétrique par rapport à  $(x, y)$  et à  $(z, t)$ , et symétrique par rapport à l'échange de  $(x, y)$  et de  $(z, t)$ . On parle de tenseur de courbure de Riemann.

Dans une base orthonormée  $(u, v, w)$ , on a :

$$\langle R_{u,v}v, u \rangle = -1 ,$$

$$\langle R_{u,v}u, w \rangle = 0 ,$$

les autres valeurs s'en déduisent.

**Preuve** On se ramène au plan hyperbolique en choisissant  $u, v$ , symétriques par rapport à un plan totalement géodésique (par exemple un plan vertical dans le modèle du demi-espace).

**NB** Vraiment inventé par Riemann, en même temps que la notion de variété, dans le cadre général des variétés riemanniennes. !

**Définition** Courbure sectionnelle d'une variété riemannienne :

$$K(P) = \langle R_{u,v}v, u \rangle ,$$

où  $(u, v)$  forme un repère orthonormé de  $P$ , qui est un 2-plan dans l'espace tangent en un point.

'Ainsi l'espace hyperbolique est à courbure sectionnelle constante égale à  $-1$ .

**Plans géodésiques.** Ce sont des plans dans lesquels "restent" les géodésiques qui en partent en étant tangent (comme dans l'espace euclidien). L'existence de ces plans suit du modèle projectif. Par chaque  $x$  et chaque plan dans  $T_x H^3$  il passe exactement un plan totalement géodésique.

Dans le modèle du demi-espace de Poincaré, correspondent aux demi-plans verticaux et aux demi-sphères centrées sur  $z = 0$ .



**Champs de Jacobi.** Comme dans le cas du plan. On en déduit l'existence de géodésiques asymptotiques, et on peut définir le bord à l'infini comme quotient.

**Géodésiques asymptotiques** Comme dans le cas du plan. On en déduit une définition possible du bord à l'infini.

**Le bord à l'infini** On peut le voir dans n'importe lequel des 3 modèles.

**Propriété** Les géodésiques de  $H^3$  sont uniquement déterminées par leurs extrémités, qui sont des points distincts dans  $\partial_\infty H^3$ .

## 6.2 Les isométries comme transformations projectives complexes

**Définition**  $CP^1$  comme l'espace projectif sur  $C^2$ .

**Définition** Une transformation projective complexe sur  $CP^1$  est l'application induite sur  $CP^1$  par une application complexe linéaire inversible sur  $C^2$ .

**NB** On a une identification naturelle de  $CP^1$  privé d'un point avec  $C$ , par l'application  $[z_1, z_2] \mapsto z_1/z_2$ . Dans  $C$ , les applications projectives complexes agissent par :

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

avec  $a, b, c, d \in C$ .

**Lemme** On peut identifier  $CP^1$  avec  $S^2$ , avec sa structure conforme usuelle.

**Preuve** Par définition,  $CP^1 := C^2/C^*$ , qui s'identifie avec  $C \cup \{\infty\}$ . Puis on identifie de manière conforme  $C$  avec la sphère privée d'un point par la projection stéréographique. D'où une application complexe de  $C$  dans  $S^2$  par le théorème de Riemann (effacement des singularités).

**Propriété** Les transformation projectives complexes agissent sur  $S^2$  en préservant la structure complexe et les cercles. Par contre, ça ne préserve pas du tout la "taille" des cercles.

**Preuve** Un calcul à faire (admis ici, pas le temps).

**Exemple** Les homothéties sont projectives conformes. De même pour les inversions, i.e.  $z \mapsto 1/z$ .

**Lemme** Une transformation complexe bijective de  $CP^1$  dans lui-même est une transformation projective complexe.

**Preuve** En composant par une transformation projective complexe, on peut se ramener à l'étude d'une transformation complexe  $u$  qui fixe 0 et  $\infty$ . Posons :

$$v(z) := \frac{1}{u(1/z)},$$

alors  $v$  fixe encore 0 et  $\infty$  et on a un développement :

$$v(z) = v_1 z + v_2 z^2 + \dots$$

avec  $v_1 \neq 0$  car  $v$  est bijective au voisinage de 0. Donc  $\lim_0 v(z)/z = v_1$ , donc  $\lim_0 zu(1/z) = 1/v_1$ , donc  $\lim_\infty u(z)/z = 1/v_1$ . Donc  $u(z)/z$  est une fonction holomorphe bornée, donc elle est constante, et donc  $u(z) = az$  est une transformation projective complexe.

**NB** Attention les transformations conformes ne sont pas toujours complexes, c'est vrai ssi elles préservent l'orientation. Sinon elles sont anti-holomorphes.

**Remarque** On peut identifier le bord à l'infini de  $H^3$  avec  $\mathbf{CP}^1 = S^2$  — dans n'importe lequel des 3 modèles : projectif, disque de Poincaré, demi-espace de Poincaré. En effet :

- le bord est muni, dans chacun des modèles, d'une structure conforme, et ces structures conformes sont les mêmes ;
- les isométries agissent en préservant cette structure conforme, c'est clair en particulier dans les modèles de Poincaré.

**Lemme** Les action sur le bord à l'infini des isométries préservant l'orientation sont exactement les transformations projectives complexes.

**Preuve** On sait que les actions à l'infini des isométries sont des transformations conformes, complexes si elles préservent l'orientation. Ce sont donc des transformations projectives complexes. Réciproquement on vérifie directement, en utilisant un modèle, que les transformations projectives complexes sont les valeurs au bord des isométries de  $H^3$ .

**Propriété** Une isométrie hyperbolique est uniquement déterminée par l'image de trois points à l'infini.

**Preuve** C'est une propriété des transformations projectives complexes, on peut considérer l'image des points  $0, 1, \infty$ . Pour le montrer, on remarque que si on connaît l'image de ces trois points — soit  $0 = [0, 1], 1 = [1, 1], \infty = [1, 0]$  — par une matrice  $2 \times 2$  de déterminant 1, on peut retrouver la matrice.

### 6.3 Plans géodésiques

**Définition** Dans le modèle de Poincaré, ce sont les intersections de  $H^2$  avec les plans de dimension 3 contenant 0.

**Propriété** Dans un plan géodésique  $P$ , deux points quelconques sont joints par une unique géodésique qui reste dans  $P$ . Toute géodésique dont les extrémités sont dans un plan géodésique est elle-même dans ce plan.

**Preuve** Par définition dans le modèle de Minkowski.

**Propriété** Dans le modèle projectif, les plans géodésiques sont les intersections de la boule avec les plans euclidiens.

**Propriété** Dans le modèle du disque de Poincaré (resp. du demi-espace), les plans géodésiques sont les demi-sphères orthogonales au bord (resp. les demi-sphères ou demi-plans orthogonaux au bord).

**Propriété** Chaque plan géodésique, muni de sa métrique induite, est isométrique au plan hyperbolique.

### 6.4 Fonctions de Busemann, horosphères

**Définition** Fonctions de Buseman : définies comme dans le plan hyperbolique.

**Définition** Les horosphères sont les surfaces de niveau des fonctions de Busemann.

**Propriété** Dans le modèle du disque de Poincaré, ce sont les sphères tangentes au bord. Dans le demi-espace de Poincaré, ce sont les plans horizontaux et les sphères tangentes au bord.

**Propriété** chaque horosphère, munie de sa métrique induite, est isométrique au plan euclidien.

**Preuve** Dans le demi-espace de Poincaré.



## Chapitre 7

# Introduction aux variétés hyperboliques de dimension 3

### Motivations

**Définition.** Une variété hyperbolique est une variété munie d'une métrique localement isométrique à l'espace hyperbolique.

**Propriété** Toute variété hyperbolique complète est le quotient de l'espace hyperbolique par un groupe d'isométries qui agit isométriquement.

**Un exemple explicite de variété hyperbolique compacte.**

**Une construction moins explicite mais plus générale.**

**Explication.** C'est difficile de trouver des exemples à cause du théorème de rigidité de Mostow : si une variété hyperbolique admet une métrique hyperbolique, alors elle est unique.

**Conditions topologiques.**

**La conjecture d'hyperbolisation de Thurston.**

**Variétés convexe co-compactes** Définition ; espace de déformations ; structures géométriques sur le bord à l'infini ; relation avec la théorie de Teichmüller.

### 7.1 Propriétés de base

**Définition** Une variété hyperbolique (de dim 3) est une variété munie d'une métrique localement isométrique à celle de l'espace hyperbolique (de dim 3).

**Théorème** Les variétés hyperboliques complètes sont des quotients de  $H^3$  par un sous-groupe discret de  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

### 7.2 Comment construire des variétés hyperboliques fermées

C'est assez difficile de construire des exemples de variété hyperboliques de dimension 3 fermées ! Deux approches : par une construction géométrique, ou par une construction arithmétique. On va voir un exemple de construction géométrique, il y en a d'autres.

### Les dodécaèdres hyperboliques réguliers.

**Propriété** Les angles dièdres du dodécaèdre régulier (euclidien) sont supérieurs à  $2\pi/5$ .

**Preuve** On considère leur link, c'est un triangle sphérique dont les arêtes sont de longueur  $3\pi/5$ , car les faces ont des angles extérieurs égaux à  $\pi/5$  par Gauss-Bonnet. On utilise ensuite la formule de géométrie du triangle sphérique :

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \cos(\alpha)\sin(b)\sin(c) .$$

**Propriété** Les angles dièdres du dodécaèdre régulier idéal (hyperbolique) sont égaux à  $\pi/3$ .

**Preuve** On considère leur link, i.e. l'intersection d'un voisinage d'un sommet avec l'horosphère correspondante, qui est un plan euclidien. C'est un triangle équilatéral, donc ses angles sont égaux à  $\pi/3$ .

**Corollaire** Il existe un dodécaèdre régulier hyperbolique dont les angles dièdres sont égaux à  $2\pi/5$ .

**Propriété** Il existe un recollement des faces (opposées) de ce polyèdre qui conduit à une variété hyperbolique fermée.

**Principe de la construction :** On doit regrouper les arêtes en 6 groupes de 5, de manière que l'angle total soit  $2\pi$ . Il suit nécessairement que l'objet recollé est une variété, considérer pour cela le link d'un sommet. On se base pour le recollement sur le diagramme suivant...

Truc pour retrouver le recollement : on choisit une arête orientée  $e_1$ , on fait un virage à gauche puis un à droite et on trouve une arête orientée  $e_2$ , un virage à gauche puis un à droite et on trouve  $e_3$ , etc. Ainsi  $e_6 = e_1$ . Puis on répète pour les 6 autres groupes d'arêtes.

## 7.3 Conditions topologiques, la conjecture d'hyperbolisation

### Surfaces minimales

**Définition** Ce sont les surfaces dont la courbure moyenne est nulle.

**Propriété** La métrique induite sur une surface minimale dans une variété hyperbolique est à courbure  $K \leq -1$ .

**Corollaire** Une surface minimale ne peut être ni une sphère, ni un tore.

**Propriété** Une surface qui minimise son aire parmi les surfaces qui lui sont homotopes est minimale.

**Preuve** On calcule la variation première de l'aire lors d'une déformation normale de la surface, on trouve que c'est proportionnel à  $fH$ , où  $f$  est l'ampleur de la déformation et  $H$  est la courbure moyenne.

**Définition** Tores incompressibles.

**Théorème** Dans toute classe d'homotopie de tores incompressibles, dans une variété de dimension 3, il en existe un qui est minimale.

**Théorème** Toute classe d'homotopie de sphère plongée qui ne borde pas une boule contient une surface minimale.

**NB** Généralisation de l'existence d'une géodésique dans une classe d'homotopie de courbes sur une surface.

**NB** C'est basé sur un résultat délicat, admis ici. C'est vrai en dimension au plus 7.

**Exemple** Somme connexe de deux variétés; exemple du tore de dimension 3, qui contient des tores pas incompressibles.

**Corollaire** Dans une variété hyperbolique de dimension 3, toute sphère doit border une boule, et tout tore doit être "compressible".

**Exemple** Somme connexe de deux variétés; exemple du tore de dimension 3, qui contient des tores pas incompressibles.

**Décompositions de variétés.** Existence d'une unique décomposition d'une variété de dimension 3 fermée en somme connexe de variétés irréductibles et de  $S^1 \times S^2$ .

## 7.4 Les principaux énoncés

**Théorème** Si une variété fermée de dimension  $n \geq 3$  admet une métrique hyperbolique, elle est unique.

**NB** Contraste avec la dim 2, et aussi avec les métriques plates. Valable aussi pour les métriques hyperboliques de volume fini.

**Définition** Une variété est atoroidale si son groupe fondamental ne contient pas de  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ .

**NB** relation avec existence de tore plongé / immergé.

**Théorème** Une variété fermée de dim 3, irréductible et atoroidale, admet une métrique hyperbolique.

**Ref** Perelman, Thurston.

**NB** Cas particulier d'une conjecture plus générale, de "géométrisation" des variétés irréductibles de dimension 3.

## 7.5 Variétés convexe co-compactes

**Définition** Variété à bord.

**Définition** Convexe dans une variété hyperbolique.

**NB** Une petite boule n'est pas convexe (sauf si la topologie est triviale).

**Définition** Une variété hyperbolique convexe co-compacte est une variété  $M$  homéomorphe à l'intérieur d'une variété à bord, munie d'une métrique hyperbolique complète, qui contient un compact convexe non vide.

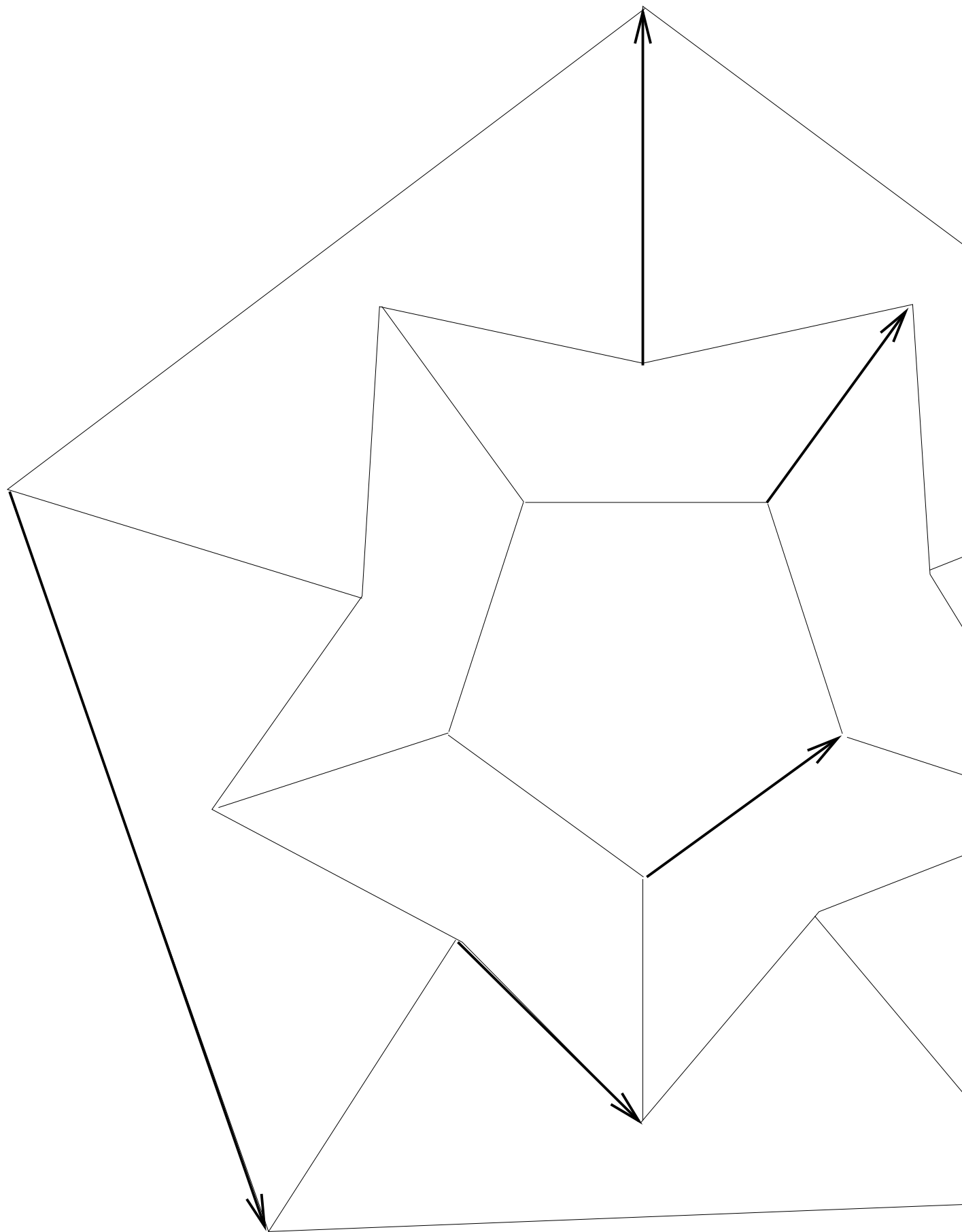


FIGURE 7.1 – Identification des faces.



# Bibliographie

- [BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [Mas77] William S. Massey. *Algebraic topology : an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.