L3 MAPES — Topologie
2009-10
Devoir no 1, 2 octobre 2009
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Exercice. Donner les définitions de
(a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles *ne* converge *pas* vers $u \in \mathbb{R}$.
(b) La fonction $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ donnée sur un interval $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *n*'est *pas* continue en $x_0 \in (a,b)$.

2. Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles telles que $\lim_\infty u_n = u_\infty$ et $\lim_\infty v_n = v_\infty$. Montrer rigoureusement, en utilisant la définition de la limite, que
(a) $\lim_\infty (u_n - v_n) = u_\infty - v_\infty$;
(b) $\lim_\infty (u_n \cdot v_n) = u_\infty \cdot v_\infty$.

3. Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs entières. Montrer que (u_n) n'assume qu'un nombre fini de valeurs.

4. Exercice.
(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles qui converge vers x_∞. Si $\lim_\infty f(x_k) = f(x_\infty)$, qu'est-ce qu'on peut dire sur la continuité de f ?
(b) Pourquoi la continuité uniforme implique la continuité ?

5. Exercice. Etudier la continuité des fonctions suivantes (utilisant la définition seulement) :
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$ définie par $f(x) = x$ pour $x \geq 0$ et par $f(x) = -x$ pour $x < 0$.
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{sgn} x$ définie par $g(x) = 1$ pour $x > 0$, par $g(x) = -1$ pour $x < 0$ et par $g(0) = 0$.

6. Exercice. Étudier la continuité des fonctions suivantes en $x_0 = 0$:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$.
(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$ (on admet que la fonction sin est bornée).

7. Exercice. Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in (a,b)$ et soit $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ une autre fonction definie sur un interval $(c,d) \subset \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \in (c,d)$.
Démontrer que :
(a) il y a un interval $(a',b') \subset (a,b)$ avec $x_0 \in (a',b')$ sur lequel on peut définir la composition
$$g \circ f : (a',b') \to \mathbb{R} \,;$$
(b) si g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors la composition $g \circ f : (a',b') \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.