L3 MAPES — Topologie
2010-2011
Devoir 2, 10 décembre 2010

Convient-il de rappeler que pour donner les points le correcteur doit comprendre et l'écriture, et le raisonnement de l'étudiant ? Quitte à écrire peu, on s'attachera à écrire **vrai** : les points ne sont pas attribués au volume.

Question de cours. Énoncer et démontrer le théorème de représentation de Riesz.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de E telle que $\|x_i\| < 1$, $1 \leq i \leq n$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$, définie par $f_i := e_i + x_i$, $1 \leq i \leq n$, est une base de E.

Exercice 2. Soit E un espace de Hilbert réel de dimension finie $p \geq 1$ (E est donc un espace euclidien), muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. Soit $e_1, \ldots, e_p$ des éléments de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle^2.$$

i) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle.$$

ii) Notons $F := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. En étudiant $F^\perp$, montrer que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.
iii) Définissons la matrice $A := [\langle e_i, e_j \rangle]_{1 \leq i,j \leq p}$. Montrer que $A^2 = A$.
iv) Montrer que A est injective.
v) En déduire que $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée.

Exercice 3.

i) On pose $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on note :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|,\ \|P\|_\infty = \max_{k=0}^{n} |a_k|,\ \|P\|_* = \max\{|P(t)|, 0 \leq t \leq 1\} \ .$$

Montrer que ce sont des normes, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. *Indication :* on pourra considérer $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n$.

ii) On chosit une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et on lui associe la fonction $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$N(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k |a_k| \ .$$

Montrer que N est une norme sur E.

iii) Soit $(\lambda'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite, et N' la norme qui lui est associée de la même manière. Montrer que N et N' sont équivalentes si et seulement si les suites (λ_k / λ'_k) et (λ'_k / λ_k) sont bornées.

Exercice 4. Pour $(A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2$ on pose $\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}(A\bar{B}^t)$.

i) Montrer que l'on définit bien ainsi un produit hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$.
ii) Pour chaque élément $A \in M_n(\mathbb{C})$, notons $|||A|||$ la norme associée. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a :

$$\|Ax\| \leq |||A|||.\ \|x\|\,,$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.