L3 MAPES — Topologie
2010-11
Feuille d'exercice no 1

1. Soit E un ensemble, et soient $A, B \in P(E)$. Comparer :

1. $P(A \cup B)$ et $P(A) \cup P(B)$,
2. $P(A \cap B)$ et $P(A) \cap P(B)$.

2. Soit E, F des ensembles, A, B des sous-ensembles de F, et $f : E \to F$ une application. Dire si les deux assertions sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement votre réponse.

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

3. De même, si $A, B \subset E$, est-il vrai que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

4. Montrer que toute suite convergente est bornée.

5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ecrire mathématiquement (avec des quantificateurs) :

1. f est continue sur $\mathbf{R}$,
2. f n'est pas continue sur $\mathbf{R}$.

6. Montrer rigoureusement que :

1. le produit de deux suites qui tendent vers l'infini est une suite tendant vers l'infini,
2. si (u_n) et (v_n) sont deux suites tendant respectivement vers u et v alors leur produit tend vers uv,
3. si (u_n) tend vers l'infini et si (v_n) tend vers $v \neq 0$ alors leur produit tend vers $\pm\infty$ (on précisera).

7. Montrer (rigoureusement) que la composée de deux applications continues est continue.

8. Etudier la continuité des fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par :

1. $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbf{Q}$.
2. $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{Q}$.
3. $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(x) = 0$ si $x = 0$.

9. Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue sur $\mathbf{R}$. Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbf{R}$, sont-elles uniformément continues ?

1. $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$.
2. $f(x) = x$.
3. $f(x) = x^2$.

10. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée, puis que f est uniformément continue.

11. Soit (u_n) une suite, soit $l \in \mathbf{R}$. Montrer que l est valeur d'adhérence de (u_n) ssi

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon \ .$$

12. Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbf{R}$. Montrer que $u(\mathbf{N}) \cup \{l\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$ et que $u(\mathbf{N}) \cup \{l\} = \overline{u(\mathbf{N})}$.

13. [Théorème de Cesaro] Soit (u_n) une suite réelle. On considère la suite des moyennes arithmétiques, définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} \ .$$

Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) converge. La réciproque est-elle vraie ?

14. Comparer les énoncés suivants :

1. (u_n) est de Cauchy.
2. Pour chaque $p \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+p} - u_n \to 0$.

Les tester sur la suite $(\sqrt{n})$.

15. Soit (x_n) une suite réelle telle que $x_{n+2} - x_n \to 0$.

1. Soit $u_n := (-1)^n (x_{n+1} - x_n)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \to 0$.
   (b) Grâce au théorème de Cesaro, en déduire que $\frac{u_n}{n} \to 0$.
2. Soit $a_n := x_{n+1} - x_n$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq |a_N| + (n-N)\frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Conclure quant à la convergence de $\left(\frac{a_n}{n}\right)$.

16. Une voiture parcourt 1000 km en 10 h, éventuellement à vitesse variable ou en faisant des pauses. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure durant son trajet où elle parcourt exactement 100 km.

17. [Théorème de Heine] Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$, $a < b$. Le but de l'exercice est de prouver par l'absurde que f est alors *uniformément* continue sur cet intervalle.

1. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Traduire cela en termes mathématiques (ε etc...).
2. Montrer dès lors qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

3. Montrer qu'il existe une extraction $\sigma : n \mapsto \sigma(n)$ et $l \in [a, b]$ tels que les sous-suites $(x_{\sigma(n)})$ et $(y_{\sigma(n)})$ convergent toutes deux vers l.
4. Conclure, grâce à la continuité de f, à une contradiction.