L3 MAPES — Topologie
2010-11
Feuille d'exercice 2

1. Montrer que la série harmonique $u_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ne converge pas.

2. Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) soient convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

3. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonction continues est continue. Est-ce vrai pour une limite simple de fonctions continues ?

4. Soit (u_n) une suite réelle bornée, on définit

$$\limsup u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k \ ,$$

$$\liminf u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k \ .$$

1. Montrer que ces deux limites existent.
2. Montrer que si l est une valeur d'adhérence de (u_n), alors

$$\liminf u_n \leq l \leq \limsup u_n \ .$$

3. Comparer $\limsup(u_n + v_n)$ et $\limsup u_n + \limsup v_n$.
4. Montrer que si (u_n) est bornée et (v_n) est convergente, alors $\limsup(u_n + v_n) = \limsup u_n + \lim v_n$.

5. Soit (E, d) un espaces métrique complet, et soit $f : E \to E$ une application telle que f^p est contractante de rapport $k \in]0, 1[$, pour un certain $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que f a un unique point fixe dans E.

6. Soit $a < b$ deux réels, et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f a au moins un point fixe.

7. Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, et soit $f : E \to F$. Montrer que :

1. si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E, alors f est continue.
2. si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E, alors f est continue.

8. Dire si les espaces métriques suivant sont complets.

1. $\mathbf{Q}$ muni de la distance canonique de $\mathbf{R}$,
2. $\mathbf{R}^2$, muni de la distance euclidienne,
3. $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, muni de la distance euclidienne,
4. l'espace des suites dont presque tous les termes sont nuls (tous les termes sauf un nombre fini) muni de la distance l_2.

9. Dans $\mathbf{R}^2$, les distances d_1, d_E et d_∞ sont-elles équivalentes ?

10. Soit E un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2 équivalentes.

1. Montrer que si (E, d_1) est complet, alors (E, d_2) est complet.
2. Montrer que si (E, d_1) est compact, alors (E, d_2) est compact.

11. Soit a_0 et b_0 deux réels vérifiant $0 < b_0 \leq a_0$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), & n \in \mathbf{N}, \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, & n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que ces suites sont bien définies.
2. Vérifier que $b_n \leq a_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer finalement que ces suites sont adjacentes et convergent vers une même limite.

12. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante, **pas forcément continue**. Montrer que f a au moins un point fixe dans $[0,1]$.

13. Soit (E,d) un espace métrique compact et (f_n) une suite de $C(E, \mathbf{R})$. Soit de plus $f \in C(E, \mathbf{R})$ telle que pour chaque x dans E, on a $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} f(x)$.

Montrer qu'alors (f_n) converge **uniformément** vers f en $+\infty$. Indication : on pourra considérer $g_n := f - f_n$ et supposer par l'absurde que g ne tend pas uniformément vers 0 ; utiliser la compacité.