L3 MAPES — Topologie
2010-11
Feuille no 5

**1.** Soient $E$ un e.v.n. et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\max(1, \|x\|)}$. Montrer que $f$ est 2-lipschitzienne.

**2.** Soit $E = \mathbf{R}[x]$ muni de la norme :

$$\|\sum_i a_i x^i\| = \sum_i |a_i|.$$

1. Est-ce que $\phi : P \mapsto P(x+1)$ est continue ?
2. Est-ce que $\psi_A : P \mapsto AP$ est continue ? ($A \in E$ fixé)

**3.** Soient $E$ un $\mathbf{R}$-evn et $f : E \to \mathbf{R}$ linéaire.

1. Montrer que $f$ est continue si et seulement si $\ker f$ est fermé (pour la réciproque : supposer $\ker f$ fermé, montrer que $\{x \mid f(x) > 0\}$ est ouvert, puis étudier $\{x \mid -1 < f(x) < 1\}$)
2. On suppose $f$ continue. Soit $x \in E$. Montrer que

$$|f(x)| = \|f\| d(x, \ker f)$$

**4.** Soit $H$ un espace de Hilbert et $V$ un s-ev de H. Montrer que :

1. $V^\perp$ est fermé.
2. $adh(V) = V^{\perp\perp}$ et $adh(V)^\perp = V^\perp$.
3. $V$ est dense si et seulement si $V^\perp = \{0\}$.

**5.** Soient $H$ un espace de Hilbert, $C$ une partie convexe fermée de $H$, et $Q$ une partie convexe, compacte de $H$ qui ne rencontre pas $C$. Montrons qu'il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement $C$ et $Q$.

1. Montrer que l'application $x \to \|x - p_C(x)\|$ atteint son minimum sur $Q$, où $p_C$ est la projection orthogonale sur $C$. On note $x_0$ un point qui réalise ce minimum.
2. Montrer que $\|x_0 - p_C(x_0)\|$ réalise la distance de $C$ à $Q$. En déduire que la projection orthogonale de $p_C(x_0)$ sur $Q$ est $x_0$.
3. Soit $l$ la forme linéaire $y \mapsto \langle y, p_C(x_0) - x_0 \rangle$ et notons $m = (x_0 + p_C(x_0))/2$. Montrer que $l(y) < l(m) < l(z)$ pour tout $y \in Q$, $z \in C$.
4. Conclure.