L3 MAPES — Topologie
2010-11
Corrigé abrégé de l'examen final, 3 janvier 2011

2. Exercice. Soit E un espace de Hilbert, soit V un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit $x \in V$. Pour tout $y \in V^\perp$, on a $\langle x, y\rangle = 0$ par définition de $V^\perp$. Donc x est dans $(V^\perp)^\perp$.

2. Soit $x \in \overline{V}$. Alors $x = \lim x_n$, où (x_n) est une suite d'éléments de V. Soit maintenant $y \in V^\perp$. Pour tout n, $\langle x_n, y\rangle = 0$. Par passage à la limite (et continuité du produit scalaire) $\langle x, y\rangle = 0$. Donc $x \in (V^\perp)^\perp$.

3. Soit $x \notin \overline{V}$, soit x_0 le projeté orthogonal de x sur $\overline{V}$. On sait que $x - x_0 \in \overline{V}^\perp$. Donc $x - x_0$ est orthogonal à tous les éléments de V, donc $x - x_0 \in V^\perp$. Mais $x \notin \overline{V}$, si bien que $x - x_0 \neq 0$, et donc $x - x_0$ n'est pas orthogonal à lui-même. Il suit que $x - x_0 \notin (V^\perp)^\perp$. Comme par contre $x_0 \in (V^\perp)^\perp$ d'après la question (2), il suit que $x \notin (V^\perp)^\perp$.

3. Exercice. 1. Pour tout $f, g \in L^\infty(X)$, $D(f, g)$ est bien définie puisque f et g sont bornées par définition. Pour montrer que D est une distance le seul point non évident est l'inégalité triangulaire. Prenons trois fonctions $f, g, h \in L^\infty(X)$. Par définition de la borne sup il existe une suite (x_n) dans X telle que

$$D(f, h) = \lim |f(x_n) - h(x_n)| \ .$$

Pour tout n on a

$$|f(x_n) - h(x_n)| \leq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - h(x_n)| \leq D(f, g) + D(g, h) \ .$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient l'inégalité triangulaire.

2. Soit $x \in X$. Comme (X, d) est compact, il est borné, sans quoi il existerait une suite (y_n) dans X telle que $d(x, y_n) \to \infty$, et cette suite ne saurait admettre de valeur d'adhérence (si $y_{\sigma(n)} \to y$ alors $d(x, y_{\sigma(n)}) \to d(x, y)$). Ceci implique précisément que d_x est majorée et donc dans $L^\infty(X)$.

3. Soit $x, y \in X$. On sait d'après le cours que pour tout $z \in X$ on a

$$|d_x(z) - d_y(z)| = |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) \ .$$

De plus on remarque que $d_x(y) - d_y(y) = d(x, y)$. Il suit que $D(d_x, d_y) = d(x, y)$.

4. Cette application est injective car d_x s'annule en un seul point, x, si bien que si $d_x = d_y$ alors $x = y$. Par contre elle n'est jamais surjective (sauf si $X = \emptyset$) puisque la fonction constante égale à 1 n'est pas de la forme d_x pour un $x \in X$.

4. Exercice. 1. Pour N_1 ça a été vu en cours. Pour N_2 on vérifie immédiatement que N_2 est positivement homogène. Si $N_2(f) = 0$ alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc, comme $f(0) = 0$, $f = 0$. Enfin l'inégalité triangulaire est claire : si $f, g \in E$ alors

$$N_2(f + g) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) + g'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)| = N_2(f) + N_2(g) \ .$$

2. Soit $f \in E$, on a pour tout $x \in [0, 1]$

$$f(x) = \int_0^x f'(s)ds \leq \sup_{s\in[0,1]} |f'(s)| = N_2(f) \ ,$$

et donc $N_1(f) \leq N_2(f)$ pour tout $f \in E$. On en déduit immédiatement que l'application identité de (E, N_2) dans (E, N_1) est 1-lipschitzienne et donc continue.

3. On remarque que pour tout $n \geq 1$, $N_1(f_n) = 1/n$. Par contre $f_n'(x) = x^{n-1}$ si bien que $N_2(f_n) = 1$. Donc (f_n) tend vers 0 dans (E, N_1) mais pas dans (E, N_2), ce qui implique bien que l'identité de (E, N_1) dans (E, N_2) n'est pas continue.